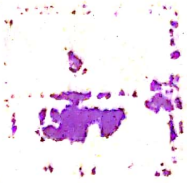
Romulus Cristescu

analiză funcțională

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ—BUCUREȘTI, 1979

Prefață



Scopul acestui manual este de a prezenta cititorilor (și în primul rînd studenților anului III al facultăților de matematică) principalele noțiuni ale analizei funcționale. Ținînd seama de întinderea deosebit de mare a acestei discipline, manualul conține mai ales o introducere în diverse capitole ale analizei funcționale, dezvoltarea acestor capitole nefiind permisă de dimensiunile cărții (sau de programa analitică). Dealtfel, dezvoltarea unor capitole conținute în această carte, intră în sarcina unor cursuri speciale care se adresează studenților anilor IV și V ai facultăților de matematică.

Prezentul manual este la a III-a sa ediție.

În raport cu edițiile precedente au fost aduse unele modificări, Printre acestea pot fi menționate cele privind reprezentarea integrală a operatorilor autoadjuncți, sau reprezentarea algebrelor Banach. Mici modificări se pot întîlni însă în toate capitolele (simplificarea unor demonstrații, adăugarea unor propoziții sau observații, etc.). A fost micșorat capitolul de spații ordonate și a fost adăugat un nou capitol care reprezintă o introducere în teoria operatorilor neliniari.

Romulus Cristescu

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOL INTRODUCTIV

Pentru a ușura citirea cărții, în acest capitol vom aminti unele noțiuni de teoria mulțimilor și de topologie, care vor fi utilizate în celelalte capitole.

§ 1. NOȚIUNI DE TEORIA MULȚIMILOR

1.1. MULȚIMI ȘI FUNCȚII

Presupunem cunoscute noțiunile elementare de teoria mulțimilor[1]. Dacă x este un element al unei mulțimi E iar $p(x)$ o propoziție care se referă la x, se notează prin $\{x \in E | p(x)\}$ (sau numai $\{x | p(x)\}$ mulțimea tuturor elementelor $x \in E$ pentru care propoziția $p(x)$ este adevărată.

În toată cartea, se va nota prin **N** mulțimea numerelor naturale, prin **R** mulțimea numerelor reale și prin **K** mulțimea numerelor complexe.

Dacă E este o mulțime oarecare iar $A \subset E$, complementara lui A în E va fi notată $\mathbf{C}_E A$ sau numai $\mathbf{C}A$ dacă se subînțelege mulțimea E. Mulțimea vidă se va nota $\varnothing$.

O *aplicație* f a unei mulțimi E într-o mulțime F (adică o lege care asociază fiecărui element $x \in E$ un element $y \in F$ și numai unul singur) se mai numește și *funcție* definită pe E, cu valori în F. Se notează $f: E \to F$ sau numai f (cînd E și F se subînțeleg). Dacă $x \in E$ atunci prin aplicația f elementului x îi corespunde un element din F care se notează $f(x)$ (iar funcția se mai notează $x \to f(x)$). Dacă se consideră o funcție $f: E \to F$ și o submulțime $A \subset E$ se notează

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

iar $f(A)$ se numește *imaginea* (prin f) a mulțimii A.

---

[1] În particular, presupunem cunoscute noțiuni ca: incluziune, submulțime (parte), reuniune, intersecție, complementară, submulțime vidă, mulțimi disjuncte, etc. Utilizăm semnele obișnuite de apartenență, incluziune, reuniune, intersecție.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $B \subset F$, se notează

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\}$$

iar $f^{-1}(B)$ se numește *preimaginea* (prin f) a mulțimii B.

Dacă $\{A_j\}_{j \in J}$ este o familie de submulțimi ale unei mulțimi E, se notează prin $\bigcup_{j \in J} A_j$ reuniunea familiei și prin $\bigcap_{j \in J} A_j$ intersecția sa.

Pentru orice funcție $f : E \to F$ și oricare ar fi familiile $\{A_j\}_{j \in J}$ și $\{B_j\}_{j \in J}$ de submulțimi respectiv din E, F, au loc egalitățile

$$f(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} f(A_j),$$

$$f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j),$$

$$f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j),$$

precum și incluziunea

$$f(\bigcap_{j \in J} A_j) \subset \bigcap_{j \in J} f(A_j).$$

Are, de asemenea, loc egalitatea

$$f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B)$$

oricare ar fi $B \subset F$.

Dacă f este o funcție definită pe E, cu valori în F, atunci mulțimea E se numește *domeniul* lui f, iar mulțimea $f(E)$ se numește *codomeniul* lui f. Dacă $E_1 \subset E$, atunci funcția f_1 definită pe E_1 (cu valori în F) prin

$$f_1(x) = f(x), \quad (x \in E_1)$$

se numește restricția lui f la E_1.

Fie f o funcție definită pe E, cu valori în F. Dacă din $x_1 \neq x_2$ rezultă $f(x_1) \neq f(x_2)$ se zice că f este o *injecție*. Dacă $f(E) = F$, se zice că f aplică E pe F sau că f este o *aplicație* a lui E pe F (sau că f este o *surjecție*). Dacă f aplică E pe F și dacă f este o injecție, se zice că f este o *aplicație biunivocă* a lui E pe F, sau, o *bijecție*.

Să considerăm acum două funcții $f : E \to F$ și $g : F \to G$. Funcția $h : E \to G$ definită prin $h(x) = g(f(x))$, $\forall x \in E$ se numește *funcția compusă* a funcțiilor g și f și se notează $h = g \cdot f$ (sau $h = gf$). Se mai spune că h se obține prin *compunerea* celor două funcții.

Fie acum A și B două mulțimi oarecare. *Produsul cartezian* $A \times B$ al mulțimilor A și B este prin definiție mulțimea

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Produsul cartezian a n mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in A_i\}.$$

Dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, atunci se notează cu A^n produsul cartezian.

Scanned with OKEN Scanner

Produsul cartezian se introduce și pentru o familie oarecare $\{A_j\}_{j\in J}$ de mulțimi

$$\prod_{j\in J} A_j = \{\{x_j\}_{j\in J} | x_j \in A_j\}.$$

Dacă E este o mulțime oarecare, o mulțime $\mathcal{A}$ de submulțimi ale lui E se numește *lanț*, dacă pentru orice număr finit de elemente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ din $\mathcal{A}$, avem $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$.

Presupunem cunoscută noțiunea de putere a unei mulțimi și în particular noțiunea de mulțime numărabilă.

1.2. MULȚIMI ORDONATE

O mulțime X se numește *mulțime ordonată* dacă pentru anumite perechi de elemente $x, y \in X$ este definită o relație notată $\leqslant$ (numită relație de ordine), supusă la următoarele condiții:

(i) $x \leqslant x$ oricare ar fi $x \in X$ (reflexivitate);

(ii) dacă $x \leqslant y$ și $y \leqslant z$, atunci $x \leqslant z$ (tranzitivitate);

(iii) dacă $x \leqslant y$ și $y \leqslant x$, atunci $x = y$ (antisimetrie).

Fie X o mulțime ordonată.

Un element $a \in X$ se zice *minimal* dacă din $x \leqslant a$ rezultă $x = a$; un element $b \in X$ se zice *maximal* dacă din $b \leqslant x$ rezultă $b = x$.

O submulțime $E \subset X$ se zice că este *minorată* dacă există un element $a \in X$ așa ca $a \leqslant x$ oricare ar fi $x \in E$; elementul a se zice că este un *minorant* al lui E.

Se zice că E este *majorată* dacă există $b \in X$ așa ca $x \leqslant b$ oricare ar fi $x \in E$; elementul b se zice că este un *majorant* al lui E. Dacă mulțimea E este în același timp minorată și majorată, atunci se zice că este *mărginită*.

Dacă a este un minorant al lui E și dacă $a \in E$, atunci a se numește *cel mai mic element* al lui E; dacă b este un *majorant* al lui E și $b \in E$, atunci b se numește *cel mai mare element* al lui E.

Dacă E este minorată și dacă există cel mai mare minorant[1] a, atunci elementul a se numește *marginea inferioară* a lui E și se notează $a = \inf E$.

Dacă E este majorată și dacă există cel mai mic majorant[2] b, atunci elementul b se numește *marginea superioară* a lui E și se notează $b = \sup E$.

Pentru două elemente $x, y \in X$ se notează

$$x \wedge y = \inf \{x, y\}, \quad x \vee y = \sup \{x, y\}.$$

Pentru un număr finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ se notează

$$\bigwedge_{k=1}^{n} x_k = \inf \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad \bigvee_{k=1}^{n} x_k = \sup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Pentru o familie $\{x_j\}_{j\in J}$ de elemente ale lui X se utilizează notațiile $\bigwedge_{j\in J} x_j$, $\bigvee_{j\in J} x_j$.

[1] Adică în mulțimea minorantelor există cel mai mare element.

[2] Adică în mulțimea majorantelor există cel mai mic element.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă J este mulțimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale, se mai utilizează și notațiile $\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$, $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$.

Se pot verifica următoarele propoziții privind marginile submulțimilor mulțimii ordonate X.

1) Dacă există $a=\inf E$ și $b=\sup E$, atunci $a \leqslant b$.

2) Dacă $E_1 \subset E_2$ și dacă există $a_1=\inf E_1$ și $a_2=\inf E_2$, atunci $a_1 \geqslant a_2$; dacă există $b_1=\sup E_1$ și $b_2=\sup E_2$, atunci $b_1 \leqslant b_2$.

3) Fie $x_j \leqslant y_j$ pentru orice $j \in J$; dacă există $x'=\bigwedge_{j\in J} x_j$ și $y'=\bigwedge_{j\in J} y_j$ atunci $x' \leqslant y'$; dacă există $x''=\bigvee_{j\in J} x_j$ și $y''=\bigvee_{j\in J} y_j$, atunci $x'' \leqslant y''$.

4) Dacă există $a=\sup A$ și $b=\inf B$ și dacă $x \leqslant y$ oricare ar fi $x \in A$ și $y \in B$, atunci $a \leqslant b$.

5) Fie $E=\bigcup_{j\in J} E_j$; dacă există $a=\inf E$, precum și $a_j=\inf E_j$, oricare ar fi $j \in J$, atunci există și $\bigwedge_{j\in J} a_j$ și are loc egalitatea

$$a=\bigwedge_{j\in J} a_j;$$

dacă există $b=\sup E$, precum și $b_j=\sup E_j$, pentru orice $j \in J$, atunci există și $\bigvee_{j\in J} b_j$ și

$$b=\bigvee_{j\in J} b_j.$$

O mulțime ordonată X se zice că este *dirijată la dreapta* dacă pentru orice pereche de elemente $a, b \in X$ există un element $c \in X$ așa ca $a \leqslant c$ și $b \leqslant c$. Mulțimea ordonată X se zice că este *dirijată la stînga* dacă pentru orice pereche $a, b \in X$ există $c \in X$ astfel încît $c \leqslant a$ și $c \leqslant b$.

O mulțime care este în același timp dirijată la dreapta și la stînga se zice *dirijată în ambele sensuri*.

O mulțime dirijată la dreapta se va numi simplu *mulțime dirijată*.

O mulțime ordonată X se zice că este o *latice* (sau o *mulțime reticulată*) dacă pentru orice pereche de elemente $x, y \in X$ există $x \wedge y$ și $x \vee y$.

Într-o latice, pentru orice număr finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ există $\bigwedge_{j=1}^{n} x_j$ și $\bigvee_{j=1}^{n} x_j$.

O latice X se zice că este *relativ completă* dacă pentru orice mulțime minorată $A \subset X$ există $\inf A$ și pentru orice mulțime majorată $B \subset X$ există $\sup B$.

O mulțime ordonată X se zice că este *total ordonată* dacă pentru orice pereche de elemente $x, y \in X$ are loc una din relațiile: $x \leqslant y$; $y \leqslant x$.

O mulțime ordonată X se zice că este *bine ordonată* dacă orice submulțime $A \subset X$ are cel mai mic element.

Propoziția care urmează este cunoscută sub numele de:

Teorema lui Zorn. *Fie X o mulțime ordonată astfel ca orice parte total ordonată a lui X să fie majorată. Atunci, pentru orice element $x_0 \in X$ există un element maximal $x_1 \in X$ așa ca $x_0 \leqslant x_1$.*

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. NOȚIUNI DE TOPOLOGIE

2.1. SPAȚII TOPOLOGICE

Se zice că pe o mulțime X s-a dat o *topologie* τ, dacă s-a fixat o mulțime $\mathcal{T}$ de părți ale lui X, cu următoarele proprietăți:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) dacă $\{A_j\}_{j\in J}$ este o familie oarecare (nevidă) de mulțimi din $\mathcal{T}$ și $A = \bigcup_{j\in J} A_j$, atunci $A \in \mathcal{T}$;

(iii) dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt mulțimi din $\mathcal{T}$ și dacă $A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, atunci $A \in \mathcal{T}$.

O mulțime $A \in \mathcal{T}$ se numește *mulțime deschisă*.

Mulțimea X pe care s-a dat o topologie τ se numește *spațiu topologic*. Un element $x \in X$ se mai numește, în acest caz, un punct al spațiului X.

Fie X un spațiu topologic.

Dacă $x \in X$, o mulțime $E \subset X$ se zice că este o *vecinătate* a lui x, dacă există o mulțime deschisă A, așa ca $x \in A$ și $A \subset E$.

O mulțime A este vecinătatea fiecărui punct al său dacă și numai dacă A este o mulțime deschisă.

Mulțimea $\mathcal{V}_x$ a tuturor vecinătăților punctului x are următoarele proprietăți:

1) Dacă $A \in \mathcal{V}_x$, atunci $x \in A$.

2) Dacă $A \in \mathcal{V}_x$, și $A \subset B$, atunci $B \in \mathcal{V}_x$.

3) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{V}_x$ și $A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, atunci $A \in \mathcal{V}_x$.

4) Pentru orice $E \in \mathcal{V}_x$ există $A \in \mathcal{V}_x$ așa ca $E \in \mathcal{V}_y$ oricare ar fi $y \in A$.

Reciproc, fie X o mulțime oarecare și pentru orice element $x \in X$ fie dată o mulțime $\mathcal{V}_x$ de părți ale lui X cu proprietățile 1°—4°. Există atunci în X o topologie τ și numai una pentru care $\mathcal{V}_x$ să reprezinte mulțimea vecinătăților punctului x. Această topologie se obține considerînd ca mulțime $\mathcal{T}$ a tuturor mulțimilor deschise, mulțimea tuturor mulțimilor $A \subset X$ cu proprietatea că $A \in \mathcal{V}_x$, oricare ar fi $x \in A$.

O topologie τ pe o mulțime X poate fi deci definită și cu ajutorul mulțimilor de vecinătăți.

Fie X un spațiu topologic, x un punct oarecare al lui X și $\mathcal{V}_x$ mulțimea vecinătăților lui x. O parte $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{V}_x$ se numește *bază de vecinătăți* (sau *sistem fundamental de vecinătăți*) ale lui x dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$, există $W \in \mathcal{W}_x$ așa ca $W \subset V$.

Fie acum X o mulțime oarecare și pentru orice element $x \in X$ fie dată o mulțime $\mathcal{W}_x$ (nevidă) de părți ale lui X, cu următoarele proprietăți: (1) $x \in W$ oricare ar fi $W \in \mathcal{W}_x$; (2) pentru orice $W_1, W_2 \in \mathcal{W}_x$ există $W_3 \in \mathcal{W}_x$ așa ca $W_3 \subset W_1 \cap W_2$; (3) dacă $W \in \mathcal{W}_x$, există $V \in \mathcal{W}_x$ așa ca pentru orice $y \in V$ să avem $W \supset W_y$ pentru o anumită mulțime $W_y \in \mathcal{W}_y$.

Pentru fiecare $x \in X$ să notăm cu $\mathcal{V}_x$ mulțimea tuturor părților E din X care au proprietatea: există $W \in \mathcal{W}_x$ așa ca $W \subset E$. Atunci $\mathcal{V}_x$ este mulțimea vecinătăților punctului x într-o anumită topologie τ iar $\mathcal{W}_x$ este o bază de vecinătăți ale lui x.

Scanned with OKEN Scanner

Fie X un spațiu topologic.

O mulțime $B \subset X$ se zice *închisă* dacă mulțimea $A = \complement B$ este deschisă.

Din această definiție rezultă că mulțimile închise au următoarele proprietăți:

(i′) $\varnothing$ și X sînt mulțimi închise;

(ii′) dacă $\{B_j\}_{j \in J}$ este o familie oarecare de mulțimi închise și $B = \bigcap_{j \in J} B_j$, atunci B este închisă;

(iii′) dacă $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sînt mulțimi închise și $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, atunci B este închisă.

Fie A o submulțime a spațiului topologic X. Un punct $x \in A$ se zice că este un *punct interior* al lui A dacă A este o vecinătate a lui x. Mulțimea tuturor punctelor interioare ale unei mulțimi A se numește *interiorul lui A* și se notează: $\operatorname{int} A$. Mulțimea $\operatorname{int} A$ este cea mai mare mulțime deschisă conținută în mulțimea A; ea este reuniunea tuturor mulțimilor deschise conținute în A. Pentru ca o mulțime A să fie deschisă, este necesar și suficient ca $A = \operatorname{int} A$.

Un punct $x \in X$ se zice că este un *punct aderent* mulțimii A, dacă pentru orice vecinătate V a lui x avem $V \cap A \neq \varnothing$. Mulțimea tuturor punctelor aderente unei mulțimi A se numește *închiderea* (sau aderența) lui A și se notează $\overline{A}$. Mulțimea $\overline{A}$ este cea mai mică mulțime închisă, care conține mulțimea A; ea este intersecția tuturor mulțimilor închise care conțin mulțimea A. Pentru ca o mulțime A să fie închisă, este necesar și suficient ca $A = \overline{A}$.

Un punct $x \in X$ este un *punct de acumulare* pentru o mulțime A dacă orice vecinătate V a lui x conține un punct al lui A diferit de x. Orice punct de acumulare este un punct aderent. Orice punct aderent mulțimii A, dar care nu aparține lui A, este un punct de acumulare. Dacă $x \in A$, dar dacă x nu este un punct de acumulare pentru A, atunci x se numește *punct izolat* al mulțimii A.

O mulțime A se zice că este *densă peste tot* (sau că este *densă* în X) dacă $\overline{A} = X$.

Dacă X_0 este o submulțime a lui X, atunci mulțimea $\mathcal{T}_0 = \{A \cap X_0 \mid A \in \mathcal{T}\}$ are proprietățile (i), (ii), (iii) de la începutul secțiunii, deci definește o topologie τ_0 pe X_0. Se zice că τ_0 este *topologia indusă* pe X_0 de τ (sau că τ_0 este *urma* lui τ pe X_0) iar X_0 se numește *subspațiu topologic* al lui X.

Într-un spațiu topologic X, o mulțime A se numește *rară* dacă $\operatorname{int} \overline{A} = \varnothing$. O mulțime se numește *slabă* sau de *categoria I* (Baire) dacă este o reuniune numărabilă de mulțimi rare. O mulțime care nu este de categoria I se numește de *categoria a II-a* (Baire).

Prin definiție, un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puncte ale unui spațiu topologic X *converge* către un punct x, iar x se numește *limita șirului*, dacă pentru orice vecinătate V a lui x există un număr natural n_0 așa ca $x_n \in V$ dacă $n > n_0$. Se notează $x_n \to x$ sau $x = \lim_n x_n$.

Fie X o mulțime oarecare și τ_1, τ_2 două topologii pe X, definite cu ajutorul mulțimilor de părți (deschise) $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$. Se zice că τ_1 este *majorată* de τ_2 (sau că τ_2 majorează τ_1) și se scrie $\tau_1 \leqslant \tau_2$ dacă $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\tau_1 \leqslant \tau_2$ se mai zice că τ_2 este *mai fină* decît τ_1 (sau că τ_1 este mai puţin fină decît τ_2), iar dacă $\tau_1 < \tau_2$ (adică $\tau_1 \leqslant \tau_2$ şi $\tau_1 \neq \tau_2$) atunci se mai zice că τ_1 este *strict mai fină* decît τ_2.

Dacă pentru topologiile τ_1, τ_2 are loc una dintre relaţiile $\tau_1 \leqslant \tau_2$ sau $\tau_2 \leqslant \tau_1$, atunci se zice că topologiile sînt *comparabile*.

Pentru ca $\tau_1 \leqslant \tau_2$ este necesar şi suficient ca pentru orice punct $x \in X$, orice vecinătate a lui x în topologia τ_1 să fie o vecinătate a lui x în topologia τ_2.

Fie acum X o mulţime oarecare şi $\mathscr{G}$ o mulţime oarecare de părţi ale lui X. Fie $\mathscr{G}'$ mulţimea de părţi ale lui X care este compusă din toate intersecţiile finite de mulţimi din $\mathscr{G}$ la care adăugăm mulţimea X. Fie $\mathscr{T}$ mulţimea reuniunilor oarecare de mulţimi din $\mathscr{G}'$, inclusiv partea vidă a lui $\mathscr{G}'$. Atunci $\mathscr{T}$ are proprietăţile (i), (ii), (iii) de la începutul secţiunii 2.1, deci defineşte o topologie τ pe X. Această topologie este cea mai puţin fină topologie pentru care toate mulţimile din $\mathscr{G}$ sînt deschise. Se zice că topologia τ este *generată* de $\mathscr{G}$.

Fie X şi X' două spaţii topologice şi $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$ mulţimile părţilor deschise respectiv din X şi X'.

Se zice că spaţiile topologice X şi X' sînt *homeomorfe* dacă există o aplicaţie biunivocă f a lui X pe X' care păstrează mulţimile deschise, adică $f(\mathscr{T}) = \mathscr{T}'$. Aplicaţia f se numeşte un *homeomorfism*.

2.2. FUNCŢII CONTINUE. DEFINIREA UNOR TOPOLOGII

Fie X şi X' spaţii topologice. O funcţie $f : X \to X'$ se zice că este *continuă într-un punct* $x_0 \in X$ dacă pentru orice vecinătate V' a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 aşa ca $f(V) \subset V'$.

Condiţia $f(V) \subset V'$ se mai poate scrie $V \subset f^{-1}(V')$. Se poate deci spune că funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate V' a lui $f(x_0)$ mulţimea $f^{-1}(V')$ este o vecinătate a lui x_0.

Dacă funcţia f este continuă în orice punct $x \in X$ se zice că f este *continuă pe* X.

Pentru ca funcţia f să fie continuă pe X este necesar şi suficient ca una din următoarele condiţii (echivalente) să fie verificată:

(i) pentru orice mulţime deschisă $A' \subset X'$, mulţimea $f^{-1}(A')$ este deschisă în X;

(ii) pentru orice mulţime închisă $B' \subset X'$, mulţimea $f^{-1}(B')$ este închisă în X.

O aplicaţie biunivocă f a lui X pe X' se zice că este *bicontinuă* dacă f este continuă şi dacă şi f^{-1} este continuă.

O aplicaţie biunivocă a lui X pe X' este un homeomorfism dacă şi numai dacă este bicontinuă.

Fie acum X o mulţime, X' un spaţiu topologic cu topologia τ' şi f o aplicaţie a lui X în X'. Dacă $\mathscr{T}'$ este mulţimea părţilor deschise din X', atunci mulţimea $\mathscr{T} = f^{-1}(\mathscr{T}')$ are proprietăţile (i), (ii), (iii) de la începutul secţiunii 2.1, deci defineşte o topologie τ pe X. Se zice că τ este *preimaginea prin f a topologiei* τ' din X'. Această topologie este cea mai puţin fină topologie pe X pentru care f este continuă pe X.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm acum o familie $\{X_j\}_{j\in J}$ de spații topologice și X o mulțime oarecare. Pentru fiecare $j\in J$ fie dată o aplicație f_j a lui X în X_j. Dacă $\mathcal{T}_j$ este mulțimea părților deschise din X_j, atunci mulțimea $\mathcal{G}=\bigcup_{j\in J} f^{-1}(\mathcal{T}_j)$ generează o topologie pe X, și anume cea mai puțin fină topologie pentru care toate aplicațiile f_j sînt continue pe X.

Fie iarăși $\{X_j\}_{j\in J}$ o familie de spații topologice și să considerăm produsul cartezian $X=\prod_{j\in J} X_j$. Fie $x=\{x_j\}_{j\in J}\in X$. Aplicația $x\to x_j$ a lui X în X_j se va nota cu $\mathbf{pr}_j$, deci $\mathbf{pr}_j(x)=x_j$. Cea mai puțin fină topologie pe X pentru care toate aplicațiile $\mathbf{pr}_j$ sînt continue se numește *topologia produs* pe X. Ea este generată de mulțimea $\mathcal{G}=\bigcup_{j\in J}\mathbf{pr}^{-1}(\mathcal{T}_j)$, unde $\mathcal{T}_j$ este mulțimea părților deschise din X_j.

Mulțimea X cu topologia produs se numește *spațiul topologic produs* (al spațiilor X_j).

În cazul unui număr finit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de spații topologice, mulțimile de forma $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$, care conțin un punct $x\in X=\prod_{j=1}^{n} X_j$ și unde $A_j\in\mathcal{T}_j$, formează o bază de vecinătăți ale punctului x.

Fie acum X un spațiu topologic oarecare, ρ o relație de echivalență în X și $Y=X/\rho$ mulțimea cît al lui X prin ρ, adică mulțimea claselor de echivalență. Fie f *aplicația canonică* a lui X în Y adică aplicația care asociază fiecărui element $x\in X$ clasa de echivalență $\hat{x}$ care conține pe x; deci $f(x)=\hat{x}$. Mulțimea $\mathcal{T}$ a tuturor părților $A\subset X/\rho$ pentru care $f^{-1}(A)$ este deschisă în X are proprietățile (i), (ii), (iii) de la începutul secțiunii 2.1. Deci $\mathcal{T}$ definește o topologie pe Y, și anume cea mai fină topologie pentru care aplicația f este continuă. Această topologie se numește *topologia cît.*

Mulțimea X cu topologia cît se numește *spațiul topologic cît* (al lui X prin ρ).

2.3. SPAȚII SEPARATE. SPAȚII COMPACTE

Un spațiu topologic X se zice că este *separat* dacă satisface următoarea condiție (a lui Hausdorff): pentru orice pereche de puncte distincte $x, y\in X$ există o vecinătate V_x a lui x și o vecinătate V_y a lui y așa ca $V_x\cap V_y=\varnothing$.

Un spațiu topologic separat se mai numește și *spațiu Hausdorff.*

Pentru ca un spațiu topologic să fie separat, este necesar și suficient ca intersecția vecinătăților închise ale unui punct oarecare x să se reducă la acest punct.

Fie X un spațiu topologic, $X\times X$ spațiul topologic produs (al lui X cu el însuși). Mulțimea tuturor elementelor de forma (x, x), $x\in X$ se numește *diagonala* spațiului $X\times X$.

O condiție necesară și suficientă ca spațiul topologic X să fie separat este ca diagonala spațiului produs $X\times X$ să fie o mulțime închisă.

Un spațiu produs $X=\prod_{j\in J} X_j$ este separat dacă și numai dacă fiecare spațiu X_j este separat.

Scanned with OKEN Scanner

Un spațiu topologic X se zice că este *compact* dacă este separat[1] și dacă satisface următoarea condiție (a lui Borel-Lebesgue): din orice acoperire[2] a lui X cu mulțimi deschise, se poate extrage o acoperire finită a lui X.

Condiția lui Borel-Lebesgue este evident echivalentă cu următoarea condiție: din orice familie de mulțimi închise din X a cărei intersecție este vidă se poate extrage o subfamilie finită, având de asemenea intersecția vidă.

Un spațiu topologic separat X este compact, dacă și numai dacă orice lanț de mulțimi închise din X are intersecție nevidă.

O parte A a unui spațiu topologic X se zice că este o *mulțime compactă* dacă subspațiul topologic A este compact.

Dacă spațiul X este separat, atunci condiția ca mulțimea A să fie compactă este echivalentă cu condiția: din orice acoperire cu mulțimi deschise a lui A se poate extrage o acoperire finită a lui A.

Într-un spațiu separat, orice mulțime compactă este închisă. Într-un spațiu compact, orice mulțime închisă este compactă.

Dacă f este o funcție continuă definită pe un spațiu topologic X, cu valori într-un spațiu separat Y, atunci pentru orice mulțime compactă $A \subset X$ mulțimea $f(A)$ este compactă în Y.

O funcție reală continuă, definită pe un spațiu compact, admite un maxim și un minim.

Teorema lui Tihonov. *Dacă* $\{X_j\}_{j\in J}$ *este o familie de spații compacte, atunci spațiul topologic produs* $X=\prod_{j\in J} X_j$ *este compact.*

O submulțime A a unui spațiu topologic X se numește *relativ compactă*, dacă închiderea sa $\overline{A}$ este o mulțime compactă.

2.4. SPAȚII METRICE

Se numește distanță într-o mulțime X o funcție $d: X\times X\to[0, +\infty)$ care are următoarele proprietăți:

(i) $d(x, y)=0$ dacă și numai dacă $x=y$;

(ii) $d(x, y)=d(y, x)$ oricare ar fi $x, y\in X$;

(iii) $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$ oricare ar fi $x, y, z\in X$.

Mulțimea X în care s-a dat o distanță d se numește *spațiu metric*.

Într-un spațiu metric se numește *sferă* (deschisă) cu centrul x_0 și cu raza ρ mulțimea

$$S(x_0;\ \rho)=\{x|d(x, x_0)<\rho\}.$$

Într-un spațiu metric X se consideră topologia care se obține, luîndu-se ca bază de vecinătăți ale unui punct oarecare x mulțimea tuturor sferelor cu centrul în x. Cu această topologie, X este un spațiu separat.

Mulțimea $\{S(x; 1/n)|n\in\mathbf{N}\}$ formează o bază numărabilă de vecinătăți ale punctului x.

Convergența unui șir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ către un element x se poate exprima în modul următor: $\lim_n d(x_n, x)=0$.

---

[1] Unii autori nu pun condiția ca X să fie separat.

[2] O acoperire a lui X este o familie $\{A_j\}_{j\in J}$ de părți ale lui X, așa ca $X=\bigcup_{j\in J} A_j$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă A este o submulțime (nevidă) a spațiului metric X, atunci pentru ca $x \in \overline{A}$ este necesar și suficient să existe un șir $\{x_n\}_{n \in N}$ de puncte aparținînd lui A care converge către x.

Pentru ca o mulțime $A \subset X$ să fie închisă, este necesar și suficient ca pentru orice șir $\{x_n\}_{n \in N}$ de elemente din A, care converge către x, să rezulte $x \in A$.

Dacă A este o parte a spațiului metric X, iar $x \in X$, se numește *distanța* de la x la A, numărul

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) | y \in A\}.$$

Într-un spațiu metric, mulțimea

$$\overline{S}(x_0; \rho) = \{x | d(x, x_0) \leqslant \rho\}$$

se numește *sferă închisă* cu centrul x_0 și raza ρ. Mulțimea $\overline{S}(x_0; \rho)$ nu reprezintă în general închiderea mulțimii $S(x_0; \rho)$.

Pentru ca un spațiu metric X să fie compact, este necesar și suficient ca din orice șir $\{x_n\}_{n \in N}$ de elemente din X să se poată extrage un subșir convergent către un element $x \in X$.

Un șir $\{x_n\}_{n \in N}$ de elemente ale unui spațiu metric X se numește *șir Cauchy*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε, astfel încît $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dacă $n, m > n_\varepsilon$.

Orice șir convergent este un șir Cauchy, dar reciproca nu este în general adevărată.

Un spațiu metric X se numește *complet*, dacă orice șir Cauchy de elemente din X este un șir convergent.

Orice spațiu metric complet este de categoria a II-a (Baire).

Dacă A este o submulțime a unui spațiu metric, se numește *diametrul* lui A numărul $\delta(A)$ dat de formula

$$\delta(A) = \sup \{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Într-un spațiu metric complet, orice șir descrescător $\{A_n\}_{n \in N}$ de mulțimi închise nevide cu diametrul tinzînd către zero, are un punct comun (și numai unul).

Într-un spațiu metric complet o submulțime A este relativ compactă dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există o parte finită $E \subset X$ cu proprietatea:

$$\forall x \in A, \ \exists y \in E : d(x, y) < \varepsilon.$$

Un caz particular de spațiu metric este spațiul $\mathbf{R}^m$ cu distanța:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j - \eta_j|^2\right)^{1/2}$$

(unde $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $\mathbf{y} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$).

Fie T o mulțime deschisă în spațiul $\mathbf{R}^m$. Fie $\{S_h\}_{h \in H}$ o familie de submulțimi deschise ale lui T, astfel ca orice submulțime deschisă a lui T să se reprezinte ca reuniunea unei subfamilii a familiei considerate[1]. În acest

[1] În acest caz, familia $\{S_h\}_{h \in H}$ se numește o *bază de mulțimi deschise* pentru T.

Scanned with OKEN Scanner

caz există o subfamilie $\{S_j\}_{j\in J}$ a familiei $\{S_h\}_{h\in H}$ care acoperă T și astfel ca pentru orice parte compactă Q a lui T, să avem $Q\cap S_j\neq\varnothing$ numai pentru o mulțime finită de indici.

Dacă X este un spațiu metric (cu distanța d) o funcție $f: X\to\mathbf{R}$ se numește *uniform continuă* pe X dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există un număr $\eta(\varepsilon)$ astfel ca din $d(x, y)<\eta(\varepsilon)$ să rezulte $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Dacă f este uniform continuă atunci f este continuă.

Dacă X este compact iar o funcție $f: X\to\mathbf{R}$ este continuă, atunci f este uniform continuă.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

SPAȚII LINIARE ȘI OPERATORI LINIARI

Un spațiu liniar este o mulțime în care este definită o operație de adunare între elemente și o operație de înmulțire a elementelor cu numere. În acest capitol vom studia spațiile liniare și vom considera aplicații ale unui spațiu liniar în altul.

În celelalte capitole, spațiile liniare vor fi înzestrate și cu cîte o structură topologică.

§ 1. SPAȚII LINIARE

1.1. NOȚIUNEA DE SPAȚIU LINIAR

Atît în acest capitol, cît și în toate celelalte capitole vom nota prin Γ unul dintre corpurile $\mathbf{R}$ (al numerelor reale) și $\mathbf{K}$ (al numerelor complexe). Dacă $\alpha \in \Gamma$, atunci prin $\overline{\alpha}$ vom înțelege numărul complex conjugat lui α.

Definiția 1.1.1. *Se numește spațiu liniar*[1] *(față de corpul* Γ*) o mulțime* $\mathscr{X}$ *(nevidă) pentru care s-a dat o aplicație* $(x, y) \to x+y$ *a lui* $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ *în* $\mathscr{X}$ *(numită operație de adunare între elemente) și o aplicație* $(\alpha, x) \to \alpha x$ *a lui* $\Gamma \times \mathscr{X}$ *în* $\mathscr{X}$ *(numită operație de înmulțire cu numere) satisfăcînd următoarele condiții*[2]*:*

(1) $x+y=y+z$ *(comutativitatea adunării);*

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ *(asociativitatea adunării);*

(3) *există un element* $\mathbf{0} \in \mathscr{X}$ *astfel încît*

$$x+\mathbf{0}=x,$$

oricare ar fi $x \in \mathscr{X}$*;*

(4) *pentru orice element* $x \in \mathscr{X}$ *există un element* $x' \in \mathscr{X}$ *așa ca* $x+x'=\mathbf{0}$*;*

(5) $1x=x$*;*

(6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$*;*

(7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$*;*

(8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

---

[1] Se mai zice și *spațiu vectorial*.

[2] Vom nota cu litere latine elementele lui X și cu litere grecești elementele lui Γ.

Scanned with OKEN Scanner

Elementul $x+y$ se numește *suma* elementelor x și y.

Elementul $\mathbf{0}$ din condiția (3) se numește *element nul*; elementul x' din condiția (4) se numește *element opus* lui x și se notează $-x$; se scrie de asemenea $x-y$ în loc de $x+(-y)$.

Primele patru condiții arată că $\mathscr{X}$ este un grup comutativ față de adunare.

Dacă $\mathscr{X}$ este un spațiu liniar față de corpul $\mathbf{R}$, atunci $\mathscr{X}$ se numește *spațiu liniar real*. Dacă $\mathscr{X}$ este un spațiu liniar față de corpul $\mathbf{K}$, atunci $\mathscr{X}$ se numește *spațiu liniar complex*. Corpul Γ se poate înlocui și printr-un corp oarecare. Elementele corpului se numesc *scalari*. Vom considera numai spații cu scalari reali sau complecși.

Exemple. (1) Mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale este un spațiu liniar real față de adunarea și înmulțirea obișnuită. Mulțimea $\mathbf{K}$ este un spațiu liniar complex.

(2) Fie $\mathbf{R}^n$ mulțimea tuturor sistemelor de cîte n numere reale. Un element $x\in\mathbf{R}^n$ este deci de forma

$$x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$$

cu $\xi_j\in\mathbf{R}$. Dacă

$$y=\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$$

vom defini

$$x+y=\{\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n\}$$
$$\alpha x=\{\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n\}, \quad (\alpha\in\mathbf{R}).$$

Se verifică ușor îndeplinirea celor 8 condiții din definiția 1.1.1. Deci $\mathbf{R}^n$ este un spațiu liniar real.

În același mod se organizează ca spațiu liniar, și anume ca spațiu liniar complex, mulțimea $\mathbf{K}^n$ a tuturor sistemelor de cîte n numere complexe.

Prin Γ^n vom nota unul oarecare dintre spațiile $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{K}^n$.

(3) Să notăm cu (s_Γ) mulțimea tuturor șirurilor $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente din Γ. Cu operațiile

$$\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}+\{\eta_n\}_{n\in\mathbf{N}}=\{\xi_n+\eta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$
$$\alpha\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}=\{\alpha\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

mulțimea (s_Γ) este un spațiu liniar.

(4) Să notăm cu $\mathbf{F}_\Gamma(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe o mulțime oarecare T, cu valori în Γ. Față de operațiile obișnuite de adunare a funcțiilor și de înmulțire a funcțiilor cu numere, mulțimea $\mathbf{F}_\Gamma(T)$ este un spațiu liniar.

(5) Fie T un spațiu topologic și să notăm cu $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor continue definite pe T cu valori în Γ. Cu aceleași operații ca în $\mathbf{F}_\Gamma(T)$ mulțimea $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ este un spațiu liniar.

1.2. PROPRIETĂȚILE SPAȚIILOR LINIARE

Fie $\mathscr{X}$ un spațiu liniar[1]. Următoarele propoziții au loc:

(1) *Elementul nul este unic și pentru orice* $x\in\mathscr{X}$ *are loc egalitatea* $\mathbf{0}x=\mathbf{0}$.

(2) *Pentru orice* $x\in\mathscr{X}$, *elementul opus este unic și are loc egalitatea* $-x=(-1)x$.

[1] Se subînțelege: față de corpul Γ.

383.722

BIBLIOTECA UNIVERSITARĂ "GHEORGHE ASACHI" IAȘI

Scanned with OKEN Scanner

(3) *Dacă* $\alpha \neq 0 (\alpha \in \Gamma)$, *iar* $\alpha x = \mathbf{0}$, *atunci* $x = \mathbf{0}$.

Demonstrație. (1) Să presupunem că ar mai exista un element $\mathbf{0}'$ cu proprietatea $x + \mathbf{0}' = x$, oricare ar fi $x \in \mathscr{X}$. În acest caz, $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

În baza definiției 1.1.1 (proprietățile (1) și (3) avem

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$$

deci $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

Avem apoi

$$0x + x = 0x + 1x = (0 + 1)x = 1x = x,$$

adică

$$x = 0x + x.$$

Pe de altă parte, dacă x' este opus lui x, atunci

$$\mathbf{0} = x + x' = (0x + x) + x' = 0x + (x + x') = 0x + \mathbf{0} = 0x,$$

deci $0x = \mathbf{0}$.

(2) Dacă x' și x'' ar fi două elemente opuse lui x, atunci

$$x' = x' + \mathbf{0} = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = \mathbf{0} + x'' = x''.$$

Să punem acum $y = (-1)x$. Avem:

$$x + y = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = \mathbf{0},$$

adică $(-1)x = -x$.

(3) Să observăm mai întîi că $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$, oricare ar fi numărul α deoarece:

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha(0x) = (\alpha 0)x = 0x = \mathbf{0}.$$

Avem apoi pentru $\alpha \neq 0$ și presupunînd $\alpha x = \mathbf{0}$

$$x = 1x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x = \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Observație. Prin inducție se stabilesc următoarele egalități:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x,$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i$$

oricare ar fi $\alpha_i, \alpha \in \Gamma$ și $x_i, x \in \mathscr{X}$.

Exercițiu. Să se stabilească următoarele:

(i) dacă $\alpha \neq 0$, $(\alpha \in \Gamma)$ și $\alpha x = \alpha y$, $(x, y \in \mathscr{X})$, atunci $x = y$;

(ii) dacă $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \beta \in \Gamma)$ și $\alpha x = \beta x$, $(x \in \mathscr{X})$, atunci $x = \mathbf{0}$;

(iii) dacă $x \neq \mathbf{0}$, $(x \in \mathscr{X})$ și $\alpha x = \mathbf{0}$, $(\alpha \in \Gamma)$, atunci $\alpha = 0$;

(iv) dacă $x \neq y$, $(x, y \in \mathscr{X})$ și $\alpha x = \alpha y$, $(\alpha \in \Gamma)$, atunci $\alpha = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\mathscr{X}$ un spațiu liniar.

Definiția 1.3.1. *O submulțime $\mathscr{X}_0$ a lui $\mathscr{X}$ se zice că este un subspațiu liniar al lui $\mathscr{X}$ dacă are proprietățile*

(1) dacă $x, y \in \mathscr{X}_0$, atunci $x+y \in \mathscr{X}_0$;

(2) dacă $x \in \mathscr{X}_0$ și $\alpha \in \Gamma$, atunci $\alpha x \in \mathscr{X}_0$.

Orice subspațiu liniar $\mathscr{X}_0$ al unui spațiu liniar $\mathscr{X}$ este un spațiu liniar.

Orice intersecție de subspații liniare este un subspațiu liniar. Dacă $A \subset \mathscr{X}$ intersecția tuturor subspațiilor liniare care conțin A, se numește *subspațiul liniar generat de A* și se notează $\mathbf{Sp}(A)$. Mulțimea $\mathbf{Sp}(A)$ este cel mai mic subspațiu liniar al lui $\mathscr{X}$ care conține A.

Exemplu. Dacă T este un spațiu topologic, atunci $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ este un subspațiu liniar al spațiului liniar $\mathbf{F}_\Gamma(T)$.

Definiția. 1.3.2. *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt elemente ale lui $\mathscr{X}$ iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ elemente ale lui Γ, atunci elementul*

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$$

se numește o combinație liniară de elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se verifică cu ușurință că dacă $A \subset \mathscr{X}$, atunci $\mathbf{Sp}(A)$ este mulțimea tuturor combinațiilor liniare de elemente aparținînd lui A.

Definiția 1.3.3. *Dacă $x, y \in \mathscr{X}$ și $x \neq y$, atunci mulțimea elementelor de forma*

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y, \quad (\lambda \in \Gamma)$$

se numește dreapta care trece prin x și y.

Definiția 1.3.4. *Se numește mulțime plană (sau varietate liniară) orice submulțime (nevidă) A a lui $\mathscr{X}$ care pentru orice două elemente distincte $x, y \in A$ conține dreapta determinată de x, y. O submulțime proprie $H \subset \mathscr{X}$ se numește hiperplan, dacă este o mulțime plană maximală (adică: dacă $H \subset E$ iar E este plană, atunci sau $H = E$ sau $E = \mathscr{X}$).*

În ceea ce urmează vom utiliza și următoarele notații (unde A, $B \subset \mathscr{X}$ și $\alpha \in \Gamma$):

$$A + B = \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$$

$$\alpha A = \{\alpha x \mid x \in A\}.$$

În particular, dacă $B = \{y\}$ vom scrie

$$A + y = \{x+y \mid x \in A\}.$$

Teorema 1.3.1. *O mulțime A este plană dacă și numai dacă pentru orice $x_0 \in A$ mulțimea $A - x_0$ este un subspațiu liniar.*

Demonstrație. Să presupunem că mulțimea A este plană și fie $x_0 \in A$.

Să notăm $A_0 = A - x_0$.

Dacă $z_1, z_2 \in A_0$, atunci

$$z_1 = x_1 - x_0, \quad z_2 = x_2 - x_0,$$

cu $x_1, x_2 \in A$. Deci

$$z_1+z_2=(x_1+x_2-x_0)-x_0=z-x_0$$

unde

$$z=x_1+x_2-x_0.$$

Dar

$$z=2\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)-x_0=2y-x_0$$

unde

$$y=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2.$$

Deoarece $x_1, x_2 \in A$, iar A este plană, rezultă $y \in A$. Din $y, x_0 \in A$ și din faptul că A este plană, rezultă, de asemenea, că $2y-x_0 \in A$, deci $z \in A$. Dar atunci

$$z_1+z_2=z-x_0 \in A-x_0.$$

De asemenea

$$\alpha z_1=\alpha x_1-\alpha x_0=(\alpha x_1+(1-\alpha)x_0)-x_0 \in A-x_0.$$

Deci A_0 este un subspațiu liniar.

Reciproc, să presupunem că pentru orice $x_0 \in A$ mulțimea $A-x_0$ este un subspațiu liniar.

Fie $x, y \in A$. Fie $\lambda \in \Gamma$ și să considerăm elementul

$$z=\lambda x+(1-\lambda)y=\lambda(x-y)+y.$$

Avem $x-y \in A-y$ și cum $A-y$ este un subspațiu liniar, rezultă și $\lambda(x-y) \in A-y$. Deci $z-y \in A-y$, de unde $z \in A$. Deci A este o mulțime plană. Teorema este demonstrată.

Un subspațiu liniar $\mathscr{X}_0$ se numește *maximal* dacă $\mathscr{X}_0 \neq \mathscr{X}$ iar din incluziunea $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}_1$ unde $\mathscr{X}_1$ este un subspațiu liniar, rezultă sau $\mathscr{X}_0=\mathscr{X}_1$ sau $\mathscr{X}_1=\mathscr{X}$.

Teorema 1.3.2. *O mulțime H este un hiperplan dacă și numai dacă există un subspațiu liniar maximal $\mathscr{X}_0$ astfel ca H să fie de forma $H=\mathscr{X}_0+x_0$.*

Demonstrație. Să presupunem că H este un hiperplan. Fie $x_0 \in H$ și să punem $\mathscr{X}_0=H-x_0$. În baza teoremei 1.3.1, mulțimea $\mathscr{X}_0$ este un subspațiu liniar. Fie $\mathscr{X}_1$ un subspațiu liniar (propriu), așa ca $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}_1$. Rezultă

$$H=\mathscr{X}_0+x_0 \subset \mathscr{X}_1+x_0=H_1.$$

Dar H_1 este o mulțime plană. Într-adevăr, dacă $x_1 \in H_1$, atunci $x_1=x'+x_0$ cu $x' \in \mathscr{X}_1$ și deci

$$H_1-x_1=\mathscr{X}_1-x'=\mathscr{X}_1,$$

adică H_1-x_1 este un subspațiu liniar.

Mulțimea H fiind o mulțime plană maximală, din $H \subset H_1$, rezultă $H=H_1$, de unde $\mathscr{X}_0=\mathscr{X}_1$. Deci $\mathscr{X}_0$ este maximal.

Reciproc, să considerăm un subspațiu liniar maximal $\mathscr{X}_0$ și o mulțime de forma

$$H=\mathscr{X}_0+x_0,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $x_0 \in \mathscr{X}$. Cum $\mathbf{0} \in \mathscr{X}_0$, rezultă că $x_0 \in H$. Dar mulțimea $\mathscr{X}_0 = H - x_0$ este un subspațiu liniar, deci, mulțimea H este plană. Fie H_1 o altă mulțime plană (diferită de $\mathscr{X}$) așa ca $H \subset H_1$. Avem

$$\mathscr{X}_0 = H - x_0 \subset H_1 - x_0.$$

Dar din $x_0 \in H$ rezultă că mulțimea $H_1 - x_0$ este un subspațiu liniar și cum $\mathscr{X}_0$ este maximal, rezultă

$$\mathscr{X}_0 = H_1 - x_0,$$

de unde deducem imediat $H = H_1$.

Teorema este demonstrată.

Definiția 1.3.5. *Pentru orice elemente $x, y \in \mathscr{X}$ mulțimea*

$$[x, y] = \{z | z = \lambda x + (1-\lambda)y;\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

se numește intervalul închis (sau segmentul) determinat de x și y. Pentru două elemente distincte x și y mulțimea

$$(x, y) = \{z | z = \lambda x + (1-\lambda)y;\ 0 < \lambda < 1\}$$

se numește intervalul deschis determinat de x și y.

Definiția 1.3.6. *O mulțime $E \subset \mathscr{X}$ se numește convexă dacă din $x, y \in E$ rezultă $[x, y] \subset E$.*

Se verifică imediat că intersecția unei familii oarecare de mulțimi convexe este o mulțime convexă.

Intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin o mulțime A se numește *acoperirea convexă* a lui A și se notează $\mathbf{co}(A)$. Ea este evident cea mai mică mulțime convexă care conține A și se verifică cu ușurință că $\mathbf{co}(A)$ este mulțimea tuturor combinațiilor liniare $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ de elemente din A, cu $\lambda_j > 0$ și $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Teorema 1.3.3. *Dacă A și B sînt mulțimi convexe, atunci*

$$\mathbf{co}(A \cup B) = \bigcup_{\substack{a \in B \\ b \in B}} [a, b].$$

Demonstrație. Fie

$$E = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} [a, b].$$

Este evident că $A \cup B \subset E$. Pe de altă parte, se observă imediat că dacă F este o mulțime convexă așa ca $A \cup B \subset F$, atunci $E \subset F$. Rămîne deci să arătăm că E este convexă.

Fie $x, y \in E$. Există atunci $a_1, a_2 \in A$ și $b_1, b_2 \in B$ și numerele α, β cu $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, așa ca

$$x = \alpha a_1 + (1-\alpha) b_1,$$

$$y = \beta a_2 + (1-\beta) b_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

acă $D0<\lambda<1$, atunci

$$\lambda x+(1-\lambda)y=[\lambda\alpha a_1+(1-\lambda)\beta a_2]+[\lambda(1-\alpha)b_1+(1-\lambda)(1-\beta)b_2$$

și notînd

$$\gamma=\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$$

$$a_0=\frac{1}{\gamma}[\lambda\alpha a_1+(1-\lambda)\beta a_2]$$

$$b_0=\frac{1}{1-\gamma}[\lambda(1-\alpha)b_1+(1-\lambda)(1-\beta)b_2]$$

(presupunînd $\gamma\neq 0,1$) avem

$$\lambda x+(1-\lambda)y=\gamma a_0+(1-\gamma)b_0.$$

Este evident că $a_0\in A$, iar din

$$1-\gamma=\lambda(1-\alpha)+(1-\lambda)(1-\beta)$$

rezultă că $b_0\in B$.

Deci $\lambda x+(1-\lambda)y\in E$. Aceeași relație rezultă direct în cazul $\gamma=0$ sau $\gamma=1$, din convexitatea mulțimilor A și B.

Teorema este demonstrată.

Definiția 1.3.7. *Se numește punct frontieră al unei mulțimi convexe E, orice punct $x_0\in\mathfrak{X}$ pentru care există $x_1, x_2\in\mathfrak{X}$ așa ca $(x_1, x_0)\subset E$ dar $(x_0, x_2)\subset \complement E$. Mulțimea punctelor frontieră ale unei mulțimi E se numește frontiera lui E.*

Un punct frontieră x_0 al mulțimii convexe E poate să aparțină sau nu lui E.

1.4. ELEMENTE LINIAR INDEPENDENTE

Definiția 1.4.1. *Se zice că n elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale unui spațiu liniar $\mathfrak{X}$ sînt liniar dependente dacă există n scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dintre care cel puțin unul nenul, așa ca*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=\mathbf{0}.$$

Dacă elementele nu sînt liniar dependente, atunci ele se zic liniar independente.

Se verifică imediat că:

Pentru ca n elemente x_i să fie liniar dependente, este necesar și suficient ca cel puțin unul dintre ele să fie o combinație liniară de celelalte.

Definiția 1.4.2. *O submulțime (nevidă) A a unui spațiu liniar $\mathfrak{X}$ se zice liniar independentă dacă orice n elemente distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale lui A sînt liniar independente.*

Din această definiție rezultă că o mulțime nevidă A (diferită de $\{\mathbf{0}\}$) este liniar independentă dacă și numai dacă nici un element al său nu este o combinație liniară de alte elemente ale sale.

O mulțime liniar independentă nu conține elementul nul.

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică de asemenea ușor că o mulțime A este liniar independentă dacă și numai dacă din $A_0 \subset A$ și $\mathrm{Sp}(A_0) = \mathrm{Sp}(A)$ rezultă $A_0 = A$.

Definiția 1.4.3. *Un spațiu liniar $\mathscr{X}$ se zice infinit dimensional, dacă există în $\mathscr{X}$ submulțimi infinite liniar independente. În caz contrar, spațiul $\mathscr{X}$ se zice finit dimensional.*

Dacă printre elementele unui spațiu finit dimensional $\mathscr{X}$ există n elemente liniar independente și orice $n+1$ elemente ale lui $\mathscr{X}$ sînt liniar dependente, spațiul $\mathscr{X}$ se zice *n-dimensional* (sau de dimensiune n).

Exemple. (1) Spațiul $\mathbf{R}^n$ este n-dimensional. Într-adevăr, elementele $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0, \ldots, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0, \ldots, 0\}$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = \{0, 0, 0, \ldots, 1\}$ sînt liniar independente, după cum se verifică imediat. Lăsăm în seama cititorului să verifice că orice $n+1$ elemente din $\mathbf{R}^n$ sînt liniar dependente.

(2) Spațiul $\mathbf{C}_{\mathbf{r}}$ $(\mathbf{R})$ este infinit dimensional. Pentru a verifica aceasta este suficient să observăm că, oricare ar fi numărul n, funcțiile

$$f_1(t) \equiv 1, \; f_2(t) \equiv t, \; \ldots, \; f_n(t) \equiv t^{n-1}$$

constituie elemente liniar independente. Într-adevăr, se știe din algebră că identitatea

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \ldots + \alpha_n t^{n-1} \equiv 0$$

nu poate avea loc decît pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Definiția 1.4.4. *Într-un spațiu liniar se numește bază algebrică (sau bază vectorială) o mulțime liniar independentă maximală.*

Cu alte cuvinte, mulțimea liniar independentă E este o bază algebrică dacă pentru orice mulțime liniar independentă E_1, din $E \subset E_1$, rezultă $E = E_1$.

Condiția ca o mulțime E să fie o bază algebrică pentru un spațiu liniar $\mathscr{X}$ se poate exprima și în modul următor: mulțimea E este liniar independentă și $\mathrm{Sp}(E) = \mathscr{X}$.

Teorema 1.4.1. *Dacă E_0 este o submulțime liniar independentă a spațiului liniar $\mathscr{X}$, atunci există o bază algebrică E așa ca $E_0 \subset E$.*

Demonstrație. Să notăm cu $\mathscr{E}$ mulțimea tuturor submulțimilor liniar independente ale lui $\mathscr{X}$ care conțin pe E_0.

Mulțimea $\mathscr{E}$ satisface condiția teoremei lui Zorn față de ordonarea prin incluziune.

Într-adevăr, fie $\{A_j\}_{j \in J}$ o parte total ordonată a lui $\mathscr{E}$ și să punem

$$A_0 = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A_0$ distincte. Există atunci A_j așa ca $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A_j$ și deci elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt liniar independente. Rezultă că A_0 este liniar independentă și, cum $E_0 \subset A_0$, avem $A_0 \in \mathscr{E}$.

În baza teoremei lui Zorn există un element maximal $E \in \mathscr{E}$ și E este evident o bază algebrică.

Teorema este demonstrată.

Din această teoremă rezultă că, dacă $\mathscr{X}_0$ este un subspațiu liniar al lui $\mathscr{X}$ și dacă E_0 este o bază algebrică în $\mathscr{X}_0$ atunci există o bază algebrică E în $\mathscr{X}$ așa ca $E_0 \subset E$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $E=\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază algebrică în spațiul liniar $\mathscr{X}$, atunci orice element $x\in\mathscr{X}$ se reprezintă sub forma

$$x=\sum_{j\in H}\xi_j e_j$$

unde H este o submulțime finită a lui J. Reprezentarea este unică, în sensul că, dacă

$$x=\sum_{j\in H'}\xi'_j e_j=\sum_{j\in H''}\xi''_j e_j$$

atunci $\xi'_j=\xi''_j$ pentru $j\in H'\cap H''$ și $\xi'_j=\xi''_j=0$ dacă $j\notin H'\cap H''$.

În cazul unui spațiu finit dimensional $\mathscr{X}$ și anume de dimensiune n, o bază este un sistem $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ format din n elemente liniar independente. Orice element $x\in\mathscr{X}$ se reprezintă în mod unic sub forma

$$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j.$$

Numerele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se numesc *coordonatele lui* x în baza E și se notează

$$x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)_E.$$

Observație. Se poate arăta că într-un spațiu liniar oarecare $\mathscr{X}$ două baze algebrice au același număr cardinal. Acest număr cardinal se numește dimensiunea spațiului $\mathscr{X}$ și se notează cu $\dim\mathscr{X}$.

Exerciții. (1) Să se arate că în spațiul n-dimensional $\mathscr{X}$ cu baza $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, elementele $x_i=\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}e_j (i=1, 2, \ldots, k)$ sînt liniar independente dacă și numai dacă matricea coeficienților ξ_{ij} are rangul k.

(2) Fie dat un sistem de ecuații liniare omogene

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j=0, \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

unde α_{ij} sînt coeficienți reali, iar ξ_j necunoscute reale.

O soluție a acestui sistem poate fi considerată ca un element $\mathbf{x}=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ al spațiului liniar $\mathbf{R}^n$.

Să se arate că mulțimea S a soluțiilor sistemului formează un spațiu liniar de dimensiune $n-p$, unde p este rangul sistemului. Să se găsească o bază a spațiului S (care poartă de obicei numele de *sistem fundamental* de soluții).

(3) Fie $\mathscr{X}$ un spațiu liniar și $E=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un sistem de elemente ale lui $\mathscr{X}$, așa ca orice element $x\in\mathscr{X}$ să se reprezinte ca o combinație liniară de elementele lui E. Presupunînd că există un element $v\in\mathscr{X}$, pentru care reprezentarea este unică, să se arate că sistemul E este o bază în $\mathscr{X}$.

1.5. SPAȚII LINIARE IZOMORFE

Definiția 1.5.1. *Două spații liniare $\mathscr{X}$ și $\mathscr{Y}$ (față de Γ) se zic izomorfe dacă există o bijecție $h: \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ astfel încît $h(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha h(x_1)+\beta h(x_2)$ (oricare ar fi elementele $x_1, x_2\in\mathscr{X}$ și numerele $\alpha, \beta\in\Gamma$).*

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 1.5.1. *Dacă $\mathscr{X}$ și $\mathscr{Y}$ sînt spații liniare n-dimensionale, atunci ele sînt izomorfe.*

Demonstrație. Fie E o bază[1] în $\mathscr{X}$ și F o bază în $\mathscr{Y}$. Oricărui element $x \in \mathscr{X}$ care în baza E se scrie

$$x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_E$$

să-i punem în corespondență elementul $y \in \mathscr{Y}$, care în baza F se reprezintă cu aceleași coordonate, adică să punem $h(x) = y$ cu

$$y = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_F.$$

Se verifică imediat că h are proprietățile din definiția 1.5.1.

Observații. (1) În baza propoziției precedente, orice spațiu liniar n-dimensional real este izomorf cu spațiul $\mathbf{R}^n$, iar orice spațiu liniar n-dimensional complex este izomorf cu $\mathbf{K}^n$.

(2) Fie $\mathscr{X}$ și $\mathscr{Y}$ spații liniare izomorfe, iar $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în $\mathscr{X}$. Fie f_i elementul corespunzător lui $e_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ prin izomorfism. Atunci $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este o bază în $\mathscr{Y}$.

1.6. SPAȚII PRODUS ȘI SPAȚII CÎT

Fie $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \ldots, \mathscr{X}_n$ spații liniare oarecare. Să considerăm produsul cartezian

$$\mathscr{X} = \prod_{j=1}^{n} \mathscr{X}_j$$

deci mulțimea tuturor sistemelor de elemente $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu $x_j \in \mathscr{X}_j$. Mulțimea $\mathscr{X}$ devine un spațiu liniar dacă definim

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots,\ x_n + y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

(unde $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$).

Spațiul $\mathscr{X}$ se numește *spațiul liniar produs* al spațiilor $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \ldots, \mathscr{X}_n$.

Fie acum $\mathscr{X}$ un spațiu liniar oarecare și G un subspațiu liniar. Vom defini următoarea relație de echivalență[2]: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in G$.

Notăm cu $\hat{x}$ clasa care conține x, deci

$$\hat{x} = x + G.$$

Mulțimea tuturor claselor de echivalență, va fi notată $\mathscr{X}/G$. Definim în $\mathscr{X}/G$ adunarea și înmulțirea cu numere

$$\hat{x} + \hat{y} = \hat{z} \Leftrightarrow x + y \sim z;$$

$$\alpha \hat{x} = \hat{v} \Leftrightarrow \alpha x \sim v.$$

---

[1] Vom spune pe scurt, „bază" pentru „bază algebrică".
[2] Adică o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Scanned with OKEN Scanner

Ca submulțimi ale lui $\mathscr{X}$ avem

$$\widehat{x}+\widehat{y}=x+y+G$$

$$\widehat{\alpha x}=\alpha x+G.$$

Mulțimea $\mathscr{X}/G$ devine astfel un spațiu liniar numit *spațiul liniar cît* al lui $\mathscr{X}$ prin G.

§ 2. OPERATORI LINIARI

2.1. NOȚIUNEA DE OPERATOR LINIAR

Fie $\mathscr{X}$ și $\mathscr{Y}$ două spații liniare[1] cu același corp Γ al scalarilor. Dacă $E\subset\mathscr{X}$, o aplicație a lui E în $\mathscr{Y}$ se va numi *operator*.

Definiția 2.1.1. *Un operator* $U\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ *se zice aditiv dacă*

$$U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$$

oricare ar fi $x_1, x_2\in\mathscr{X}$.

Dacă U este un operator aditiv, atunci $U(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, deoarece

$$U(x)=U(x+\mathbf{0})=U(x)+U(\mathbf{0})$$

oricare ar fi $x\in\mathscr{X}$. De asemenea

$$U(\rho x)=\rho U(x) \tag{2.1}$$

oricare ar fi ρ rațional.

Într-adevăr, dacă $\nu\in\mathbf{N}$

$$U(\nu x)=\nu U(x)$$

egalitate care se verifică imediat prin inducție. De aici rezultă

$$U(x)=U\left(\nu\frac{1}{\nu}x\right)=\nu U\left(\frac{1}{\nu}x\right),$$

de unde

$$U\left(\frac{1}{\nu}x\right)=\frac{1}{\nu}U(x).$$

Mai departe, pentru orice numere naturale μ, ν

$$U\left(\frac{\mu}{\nu}x\right)=\mu U\left(\frac{1}{\nu}x\right)=\frac{\mu}{\nu}U(x).$$

Deci (2.1) are loc pentru orice număr rațional $\rho>0$.

Dacă $\rho=-1$, atunci

$$U(-x)=-U(x)$$

deoarece

$$U(x)+U(-x)=U(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

---

[1] Vom nota cu același semn $\mathbf{0}$ elementele nule din $\mathscr{X}$ și $\mathscr{Y}$ fapt care nu duce la confuzii. Amintim că prin Γ notăm unul oarecare din corpurile $\mathbf{R}$, $\mathbf{K}$.

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, pentru $\rho<0$ avem $-\rho>0$ și

$$\rho x=-(-\rho x)$$

de unde

$$U(\rho x)=-U(-\rho x)=-(-\rho)U(x)=\rho U(x).$$

Am stabilit deci (2.1) pentru orice ρ rațional.

Din faptul că U este aditiv nu rezultă însă egalitatea (2.1) pentru ρ irațional.

Definiția 2.1.2. *Un operator* $U: \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ *se zice omogen dacă*

$$U(\alpha x)=\alpha U(x) \tag{2.2}$$

oricare ar fi $\alpha\in\Gamma$ *și* $x\in\mathscr{X}$.

Un operator aditiv și omogen se numește operator liniar.

Dacă U este un operator liniar, atunci

$$U\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k U(x_k)$$

oricare ar fi $\alpha_k\in\Gamma$ și $x_k\in\mathscr{X}$.

Exemple. (1) Să considerăm spațiul liniar $(s_{\mathbf{R}})$ (1.1., exemplul 3) și fie $\{\alpha_{mn}\}_{m,n\in N}$ o matrice infinită de numere reale. Să notăm cu E mulțimea elementelor $\mathbf{x}=\{\xi_n\}_{n\in N}\in(s_{\mathbf{R}})$ pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{mn}\xi_n$ este convergentă oricare ar fi $m\in\mathbf{N}$. Mulțimea E este un subspațiu liniar. Se obține atunci un operator liniar $U: E\to(s_{\mathbf{R}})$, punînd

$$\mathbf{y}=U(\mathbf{x})\Leftrightarrow\eta_m=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{mn}\xi_n,\quad(m\in\mathbf{N})$$

unde $\mathbf{y}=\{\eta_m\}_{m\in N}$. Operatorul U se numește *operator matricial.*

(2) Să notăm cu $\mathbf{C}^1_{\mathbf{R}}(T)$ mulțimea funcțiilor reale definite pe un interval T, care admit derivată continuă. Această mulțime este un spațiu liniar dacă se consideră operațiile obișnuite cu funcțiile. Să considerăm de asemenea spațiul liniar $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(T)$ al funcțiilor reale continue pe T. Se obține un operator liniar $U: \mathbf{C}^1_{\mathbf{R}}(T)\to\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(T)$ punînd

$$y=U(x)\Leftrightarrow y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\ (t\in T).$$

Operatorul U se numește *operator de derivare.*

(3) Să considerăm spațiul liniar $\mathbf{C}_\Gamma(T)$, unde T este un segment pe dreapta reală. Dacă $\varphi: T\times T\to\Gamma$ este o funcție continuă, se obține un operator liniar $U: \mathbf{C}_\Gamma(T)\to\mathbf{C}_\Gamma(T)$ punînd

$$y=U(x)\Leftrightarrow y(s)=\int_T\varphi(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\ (s\in T).$$

Operatorul U se numește *operator integral.*

2.2. SPAȚIUL OPERATORILOR LINIARI

Fie $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ două spații liniare oarecare (cu același corp Γ al scalarilor).

Vom nota prin $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})^l$ mulțimea tuturor operatorilor liniari care aplică $\mathscr{X}$ în $\mathscr{Y}$. Această mulțime este un spațiu liniar (față de Γ) dacă definim U_1+U_2 și αU prin formulele

$$(U_1+U_2)(x)=U_1(x)+U_2(x)$$

$$(\alpha U)(x)=\alpha U(x)$$

oricare ar fi $x\in\mathscr{X}$.

Elementul nul al spațiului $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})^l$ se notează prin O și se numește *operatorul nul*. El este dat de formula: $O(x)=\mathbf{0}$, $\forall x\in\mathscr{X}$.

Să considerăm acum spațiile liniare[1] $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{Z}$ și operatorii $U_1:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$, $U_2:\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}$. Operatorul $U:\mathscr{X}\to\mathscr{Z}$ dat de formula

$$U(x)=U_2(U_1(x)) \quad (x\in\mathscr{X})$$

adică operatorul obținut prin compunerea celor două aplicații U_1, U_2 se numește *produsul* operatorilor U_2 și U_1 și se notează $U=U_2U_1$.

Se verifică imediat că dacă U_1 și U_2 sînt liniari atunci și U_2U_1 este liniar.

Dacă $\mathscr{X}=\mathscr{Y}=\mathscr{Z}$ atunci U_2U_1 și U_1U_2 sînt diferiți, deci produsul nu este comutativ. Se verifică însă imediat proprietățile de asociativitate și distributivitate. Operatorul $I:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ dat de formula: $I(x)=x$, $\forall x\in\mathscr{X}$, se numește *operatorul identitate*. Evident $UI=IU=U$ oricare ar fi operatorul $U:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$. Pentru orice operator $U:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ se poate în particular considera, puterea de ordinul n: $U^n=UU^{n-1}$.

Fie iarăși $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ spații liniare oarecare și $U:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ un operator liniar. Mulțimea $\mathscr{Y}_1=U(\mathscr{X})$ este un subspațiu liniar al lui $\mathscr{Y}$, după cum se verifică imediat. Operatorul U se zice *inversabil* dacă aplicația $x\to U(x)$ a lui $\mathscr{X}$ pe $\mathscr{Y}_1$ este biunivocă. Se observă că U este inversabil, dacă și numai dacă: $U(x)=\mathbf{0}\Rightarrow x=\mathbf{0}$. Dacă U este inversabil, atunci se poate considera *inversul* său U^{-1} și anume operatorul $U^{-1}:\mathscr{Y}_1\to\mathscr{X}$ dat de: $x=U^{-1}(y)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y=U(x)$. Operatorul U^{-1} este liniar.

2.3. BAZE ALGEBRICE ȘI OPERATORI LINIARI

Fie $\mathscr{X}$ și $\mathscr{Y}$ spații liniare (față de Γ). Fie $E=\{e_j\}_{j\in J}$ o bază algebrică în spațiul liniar $\mathscr{X}$. Să asociem fiecărui element $e_j\in E$ un element $f_j\in\mathscr{Y}$. Există un operator liniar $U:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ și numai unul, așa ca

$$U(e_j)=f_j, \quad (j\in J).$$

Într-adevăr, orice element $x\in\mathscr{X}$ se poate reprezenta în mod unic (în sensul dat în § 1) sub forma

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_{j_i}e_{j_i}$$

[1] Cînd considerăm două sau mai multe spații liniare și nu facem nici o altă mențiune, înțelegem că toate au același corp Γ al scalarilor.

Scanned with OKEN Scanner

și este suficient să definim operatorul U prin formula

$$U(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f_i.$$

Fie acum $\mathscr{X}$ finit dimensional și $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în $\mathscr{X}$. Un operator $U:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ este unic determinat de elementele $f_i=U(e_i)$. Dacă

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$$

atunci

$$U(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f_i.$$

Dacă

$$f_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}e_j$$

atunci matricea $\{\alpha_{ij} \mid i,j=1, 2, \ldots, n\}$ se numește *matricea operatorului* U în baza E. În particular, operatorul identitate este caracterizat de matricea unitate.

Se verifică ușor că, dacă $y=U(x)$, atunci coordonatele η_i ale lui y sînt date de formula

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

2.4. FUNCȚIONALE LINIARE ȘI HIPERPLANE

Dacă $\mathscr{X}$ este un spațiu liniar (față de corpul Γ), iar $E\subset\mathscr{X}$ atunci o aplicație f a lui E în Γ se numește *funcțională*.

Funcționalele fiind cazuri particulare de operatori, noțiunile de funcțională aditivă, funcțională omogenă, funcțională liniară se obțin din definițiile 2.1.1, 2.1.2.

Dacă $\mathscr{X}$ este un spațiu liniar complex, atunci, el putînd fi privit în particular și ca spațiu liniar real, putem considera pe el atît *funcționale reale*, cît și *funcționale complexe*.

Exemplu. Dacă $\mathscr{X}=C_\Gamma([0,1])$ atunci formula

$$f(x)=\int_0^1\varphi(t)x(t)dt \qquad (x\in\mathscr{X}), \tag{2.3}$$

unde φ este o funcție continuă, definește o funcțională liniară pe $\mathscr{X}$.

Fie $\mathscr{X}$ un spațiu liniar oarecare.

Fie f o funcțională liniară (nenulă) pe spațiul liniar $\mathscr{X}$ și $\lambda\in\Gamma$.

Mulțimea

$$H=\{x \mid f(x)=\lambda\} \tag{2.4}$$

este un hiperplan.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, pentru orice hiperplan H în $\mathscr{X}$ există o funcțională liniară (nenulă) f pe $\mathscr{X}$ și un număr λ astfel ca să aibă loc (2.4). H este un subspațiu liniar dacă și numai dacă $\lambda=0$.

Într-adevăr, fie H mulțimea dată de formula (2.4). Fie $x_0 \in H$ și să punem $\mathscr{X}_0 = H - x_0$. Atunci:

$$\mathscr{X}_0 = \{x | f(x) = 0\};$$

Funcționala f nefiind nulă, există $a \in \mathbf{C}\mathscr{X}_0$ așa ca $f(a) \neq 0$. Fie $\mathscr{X}_1 = \mathbf{Sp}(\mathscr{X}_0 \cup \{a\})$ și fie x un element oarecare din $\mathscr{X}$. Punînd

$$\mu = \frac{f(x)}{f(a)}$$

și $x_1 = x - \mu a$, avem $f(x_1) = 0$, deci $x_1 \in \mathscr{X}_0$. Rezultă $x = x_1 + \mu a \in \mathscr{X}_1$ deci $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1$. Subspațiul liniar $\mathscr{X}_0$ este deci maximal și în baza teoremei 1.3.2, H este un hiperplan.

Reciproc, fie H un hiperplan și $\mathscr{X}_0$ un subspațiu liniar maximal așa ca $H = \mathscr{X}_0 + x_0$. Dacă $a \in \mathbf{C}\mathscr{X}_0$ atunci $\mathscr{X} = \mathbf{Sp}(\mathscr{X}_0 \cup \{a\})$. Deci orice element $x \in \mathscr{X}$ se reprezintă sub forma $x = x_1 + \mu a$ cu $x_1 \in \mathscr{X}_0$ și această reprezentare este unică. Punînd $f(x) = \mu$ obținem o funcțională liniară pe $\mathscr{X}$. Dacă $x \in H$, atunci $x = x_1 + x_0$ cu $x_1 \in \mathscr{X}_0$. Dacă $x_0 \notin \mathscr{X}_0$ se poate presupune $x_0 = \lambda a$ căci avem $x_0 = x' + \lambda a$ cu $x' \in \mathscr{X}_0$, deci $\mathscr{X}_0 + x_0 = \mathscr{X}_0 + \lambda a$. Deci $x = x_1 + \lambda a$ și

$$f(x) = \lambda.$$

Invers, dacă $f(x) = \lambda$, atunci $x = x_1 + x_0$ cu $x_1 \in \mathscr{X}_0$, deci $x \in H$. Dacă $x_0 \in \mathscr{X}_0$, atunci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in H$ și reciproc.

Să presupunem acum că $\mathscr{X}$ este un spațiu liniar real.

Fie H hiperplanul dat de formula (2.4). Acestui hiperplan i se asociază următoarele părți ale spațiului $\mathscr{X}$:

$$H_1 = \{x | f(x) \leqslant \lambda\}, \quad H_2 = \{x | f(x) \geqslant \lambda\}$$

cu

$$H_1 \cup H_2 = \mathscr{X} \text{ și } H_1 \cap H_2 = H.$$

Dacă pentru o mulțime $A \subset \mathscr{X}$ avem sau $A \subset H_1$, sau $A \subset H_2$, zicem că mulțimea A se află de aceeași parte a hiperplanului H.

Dacă A este o mulțime convexă iar H un hiperplan așa ca $H \cap A \neq \varnothing$ și dacă A se află de aceeași parte a lui H, atunci H se numește *hiperplan de sprijin* pentru A.

2.5. PRELUNGIREA FUNCȚIONALELOR LINIARE REALE

Vom da mai întîi două definiții pentru spații liniare oarecari (reale sau complexe).

Definiția 2.5.1. *O funcțională reală p definită pe un spațiu liniar $\mathscr{X}$ se zice subaditivă dacă*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$$

oricare ar fi $x, y \in \mathscr{X}$; *se zice că funcționala p este pozitiv omogenă dacă pentru orice $\alpha \geqslant 0$ și $x \in \mathscr{X}$*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

O funcțională subaditivă și pozitiv omogenă se numește funcțională subliniară.

Se verifică imediat că dacă p este o funcțională subliniară, atunci

(i) $p(0)=0$;

(ii) $-p(-x)\leqslant p(x)$.

Definiția 2.5.2. *Se numește seminormă pe un spațiu liniar $\mathscr{X}$ o funcțională reală p care are proprietățile*

(1) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$

(2) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$

oricare ar fi $x, y\in\mathscr{X}$ și $\alpha\in\Gamma$.

O seminormă este în particular o funcțională subliniară. Din condiția (2) rezultă, de asemenea, că

$$p(-x)=p(x),$$

deci cu (ii), $p(x)\geqslant 0$

Din (1) rezultă

$$p(x)\leqslant p(x-y)+p(y)$$

$$p(y)\leqslant p(y-x)+p(x)$$

și cu (2)

$$|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y).$$

Teorema 2.5.1 (H. Hahn și S. Banach). *Fie* p *o funcțională subliniară pe un spațiu liniar real $\mathscr{X}$ și f_0 o funcțională liniară definită pe un subspațiu liniar $\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}$ satisfăcînd condiția*

$$f_0(x)\leqslant p(x),\ (x\in\mathscr{X}_0). \tag{2.5}$$

În aceste condiții, funcționala f_0 se poate prelungi pe tot spațiul $\mathscr{X}$, cu păstrarea liniarității și a inegalității (2.5), *adică există o funcțională liniară f definită pe $\mathscr{X}$, așa ca*

$$f(x)=f_0(x),\quad (x\in\mathscr{X}_0)$$

$$f(x)\leqslant p(x),\quad (x\in\mathscr{X}).$$

Demonstrație. Fie $x_1\in\mathscr{X}$ așa ca $x_1\notin\mathscr{X}_0$ și să notăm

$$\mathscr{X}_1=\mathbf{Sp}\,(\mathscr{X}_0\cup\{x_1\}).$$

În baza lui (2.5), pentru orice $x', x''\in\mathscr{X}_0$ avem

$$f_0(x')-f_0(x'')=f_0(x'-x'')\leqslant p(x'-x'')=p((x'+x_1)-(x''+x_1))\leqslant p(x'+x_1)+$$
$$+p(-x''-x_1)$$

și deci

$$-p(-x''-x_1)-f_0(x'')\leqslant p(x'+x_1)-f_0(x'). \tag{2.6}$$

Să notăm

$$\alpha=\sup\{-p(-x-x_1)-f_0(x)|x\in\mathscr{X}_0\}$$

$$\beta=\inf\{p(x+x_1)-f_0(x)|x\in\mathscr{X}_0\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu (2.6) avem $\alpha \leqslant \beta$ deci dacă λ_1 este un număr aşa ca

$$\alpha \leqslant \lambda_1 \leqslant \beta$$

atunci

$$-p(-y-x_1)-f_0(y) \leqslant \lambda_1 \leqslant p(y+x_1)-f_0(y) \tag{2.7}$$

oricare ar fi $y \in \mathscr{X}_0$.

Să observăm acum că orice element $x \in \mathscr{X}_1$, se poate scrie în mod unic sub forma

$$x = y + \lambda x_1, \quad (y \in \mathscr{X}_0) \tag{2.8}$$

unde λ este un număr real[1].

Pentru orice element de forma (2.8) să punem

$$f_1(x) = f_0(y) + \lambda\lambda_1.$$

Se verifică uşor că f_1 este o funcţională liniară pe $\mathscr{X}_1$. Să arătăm acum că

$$f_1(x) \leqslant p(x), \quad (x \in \mathscr{X}_1)$$

deci că

$$f_0(y) + \lambda\lambda_1 \leqslant p(y + \lambda x_1) \tag{2.9}$$

pentru orice $y \in \mathscr{X}_0$ şi orice λ.

Pentru $\lambda = 0$, inegalitatea (2.9) coincide cu (2.5). Fie deci $\lambda \neq 0$. Dacă $\lambda > 0$, atunci, înlocuind în (2.7) pe y prin $\frac{1}{\lambda} y$, inegalitatea din dreapta devine

$$\lambda_1 \leqslant p\left(\frac{1}{\lambda} y + x_1\right) - f_0\left(\frac{1}{\lambda} y\right)$$

şi deci

$$\lambda f_0\left(\frac{1}{\lambda} y\right) + \lambda\lambda_1 \leqslant \lambda p\left(\frac{1}{\lambda} y + x_1\right).$$

Această inegalitate coincide cu (2.9) în baza proprietăţilor funcţionalelor f_0 şi p.

Dacă $\lambda < 0$, atunci, înlocuind în (2.7) pe y prin $\frac{1}{\lambda} y$ inegalitatea din stînga devine

$$-p\left(-\frac{1}{\lambda} y - x_1\right) - f_0\left(\frac{1}{\lambda} y\right) \leqslant \lambda_1$$

şi deci

$$(-\lambda) p\left(-\frac{1}{\lambda} y - x_1\right) \geqslant \lambda f_0\left(\frac{1}{\lambda} y\right) + \lambda\lambda_1$$

sau, ţinînd seama că $-\lambda > 0$,

$$p(y + \lambda x_1) \geqslant f_0(y) + \lambda\lambda_1$$

adică (2.9).

---

[1] Într-adevăr, dacă am avea

$$x = y' + \lambda' x_1 = y'' + \lambda'' x_1,$$

atunci $y' - y'' = (\lambda'' - \lambda') x_1$ cu $y' - y'' \in \mathscr{X}_0$, dar $(\lambda'' - \lambda') x_1 \notin \mathscr{X}_0$ dacă $\lambda' \neq \lambda''$. Deci $\lambda' = \lambda''$ şi atunci şi $y' = y''$.

Am arătat deci că funcționala f_0 poate fi prelungită pe un subspațiu liniar mai larg decît $\mathscr{X}_0$ cu păstrarea liniarității și a inegalității (2.5).

Să considerăm acum mulțimea $\mathscr{F}$ a tuturor prelungirilor liniare ale funcționalei f_0 care păstrează (2.5). Deci orice $f' \in \mathscr{F}$ este o funcțională liniară definită pe un subspațiu liniar $\mathscr{X}'$ al lui $\mathscr{X}$, așa ca $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}'$, $f'(x) = f_0(x)$ pentru $x \in \mathscr{X}_0$ și $f'(x) \leqslant p(x)$ pentru $x \in \mathscr{X}'$. Vom defini în $\mathscr{F}$ următoarea relație de ordine: $f' \leqslant f''$ dacă f'' este o prelungire a lui f'. În acest caz, $\mathscr{F}$ satisface condițiile teoremei lui Zorn. Într-adevăr, fie $\mathscr{F}_0$ o submulțime total ordonată a lui $\mathscr{F}$. Să punem $\mathscr{F}_0 = \{f_j | j \in J\}$ și să notăm cu $\mathscr{X}_j$ subspațiul liniar pe care este definită funcționala f_j. Să notăm cu g funcționala liniară definită pe $\bigcup_{j \in J} \mathscr{X}_j$ prin condiția

$$g(x) = f_j(x), \text{ dacă } x \in \mathscr{X}_j.$$

Funcționala g va fi marginea superioară a mulțimii $\mathscr{F}_0$.

În baza teoremei lui Zorn, mulțimea $\mathscr{F}$ are un element maximal f. Funcționala f este definită pe tot spațiul, deoarece, în caz contrar, în baza celor arătate la începutul demonstrației, ar exista o prelungire a lui f pe un subspațiu mai larg, ceea ce ar fi contradictoriu.

Teorema este demonstrată.

Teorema 2.5.2. *Dacă p este o funcțională subliniară pe un spațiu liniar real $\mathscr{X}$, atunci pentru orice element $x_0 \in \mathscr{X}$ există o funcțională liniară f definită pe $\mathscr{X}$ așa ca*

$$f(x_0) = p(x_0) \tag{2.10}$$

$$f(x) \leqslant p(x), \ (x \in \mathscr{X}). \tag{2.11}$$

Demonstrație. Fie $\mathscr{X}_0 = \mathbf{Sp}(\{x_0\})$. Orice element $x \in \mathscr{X}_0$ este de forma $x = \lambda x_0$ cu $\lambda \in \mathbf{R}$. Pentru orice astfel de element vom pune

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0). \tag{2.12}$$

Funcționala f_0 definită pe $\mathscr{X}_0$ prin egalitatea (2.12) este liniară și are proprietățile

$$f_0(x_0) = p(x_0) \tag{2.13}$$

$$f_0(x) \leqslant p(x), \ (x \in \mathscr{X}_0). \tag{2.14}$$

Egalitatea (2.13) este evidentă. Are loc și (2.14), adică

$$f_0(\lambda x_0) \leqslant p(\lambda x_0). \tag{2.15}$$

Într-adevăr, dacă $\lambda \geqslant 0$, atunci cu definiția lui f_0, avem

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0)$$

iar dacă $\lambda < 0$, atunci

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) \leqslant -\lambda p(-x_0) = p(\lambda x_0).$$

În baza teoremei 2.5.1, funcționala f_0 poate fi prelungită pe tot spațiul $\mathscr{X}$ cu păstrarea liniarității și a inegalității (2.14). Funcționala f astfel obținută verifică și egalitatea (2.10), deoarece f este egală cu f_0 pe $\mathscr{X}_0$.

Scanned with OKEN Scanner

Lema 2.5.1. *Dacă p este o funcțională subliniară pe un spațiu liniar $\mathscr{X}$ atunci, pentru orice număr $\mu>0$, mulțimea*

$$A=\{x|p(x)\leqslant\mu\}$$

este convexă, și are ca frontieră mulțimea

$$A_0=\{x|p(x)=\mu\}.$$

Demonstrație. Dacă $x,\ y\in A$, iar $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, atunci

$$p(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda p(x)+(1-\lambda)p(y)\leqslant\mu$$

deci $[x, y]\subset A$.

Fie acum $p(x_0)=\mu$. Fie $0<\alpha<1$, $\beta>1$ și $x_1=\alpha x_0$, $x_2=\beta x_0$. Atunci pentru $0<\lambda<1$

$$p(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1)=p((\lambda+\alpha-\lambda\alpha)x_0)=[\lambda+(1-\lambda)\alpha]\,\mu<\mu,$$

$$p(\lambda x_0+(1-\lambda)x_2)=p((\lambda+\beta-\lambda\beta)x_0)=[\lambda+(1-\lambda)\beta]\mu>\mu$$

deci $(x_1, x_0)\subset A$, dar $(x_0, x_2)\subset \complement A$. Astfel x_0 este un punct frontieră al lui A.

Fie acum x_0 un punct frontieră al lui A și fie $(x_1, x_0)\subset A$, iar $(x_0, x_2)\subset \complement A$ pentru anumite puncte $x_1,\ x_2\in\mathscr{X}$. Înseamnă că pentru $0<\lambda<1$

$$p(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1)\leqslant\mu,\quad p(\lambda x_0+(1-\lambda)x_2)>\mu.$$

Rezultă

$$\lambda p(x_0)=p(\lambda x_0)=p(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1-(1-\lambda)x_1)\leqslant$$

$$\leqslant p(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1)+(1-\lambda)p(-x_1)\leqslant\mu+(1-\lambda)p(-x_1)$$

precum și

$$\mu<p(\lambda x_0)+p((1-\lambda)x_2)=\lambda p(x_0)+(1-\lambda)p(x_2)$$

deci

$$\lambda p(x_0)\leqslant\mu+(1-\lambda)p(-x_1),\quad (\forall\lambda\in(0,1))$$

$$\mu<\lambda p(x_0)+(1-\lambda)p(x_2),\quad (\forall\lambda\in(0,1)).$$

Din prima inegalitate deducem $p(x_0)\leqslant\mu$, iar din a doua $\mu\leqslant p(x_0)$ și deci $p(x_0)=\mu$.

Observația 1. Lema este adevărată și dacă în locul lui A se consideră mulțimea $\{x|p(x)<\mu\}$.

Deoarece translația $x\to x+x_0$ transformă o mulțime convexă tot într-o mulțime convexă, lema rămîne adevărată dacă se înlocuiește mulțimea A prin mulțimea $B=\{x|p(x-x_0)\leqslant\mu\}$, iar A_0 prin $B_0=\{x|p(x-x_0)=\mu\}$.

Observația 2. Se poate da interpretare geometrică a teoremei 2.5.2, după cum urmează.

Să considerăm mulțimea convexă

$$A=\{x|p(x)\leqslant\mu\}$$

pentru un anumit $\mu>0$. Fie x_0 un punct frontieră al lui A. Hiperplanul

$$H=\{x|f(x)=\mu\}$$

trece prin x_0 (adică $x_0\in H$) deoarece

$$f(x_0)=p(x_0)=\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

În plus, dacă $x \in A$ atunci

$$f(x) \leqslant p(x) \leqslant \mu$$

adică

$$A \subset \{x | f(x) \leqslant \mu\}$$

deci A se găsește de aceeași parte a lui H.

Astfel H este un hiperplan de sprijin pentru A.

Interpretarea geometrică este deci următoarea:

Dacă p este o funcțională subliniară pe spațiul liniar real $\mathscr{X}$ iar $\mu > 0$, atunci pentru orice punct de frontieră x_0 al mulțimii convexe

$$A = \{x | p(x) \leqslant \mu\}$$

se poate construi un hiperplan de sprijin pentru A, care să treacă prin x_0.

2.6. PRELUNGIREA FUNCȚIONALELOR LINIARE COMPLEXE

Teorema 2.6.1. (*H. Bohnenblust, A. Sobczyk, G. A. Suhomlinov*). *Fie $\mathscr{X}$ un spațiu liniar complex, p o seminormă pe $\mathscr{X}$, iar f_0 o funcțională liniară definită pe un subspațiu liniar $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}$ satisfăcînd inegalitatea*

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \tag{2.16}$$

pentru orice $x \in \mathscr{X}_0$. Atunci f_0 se poate prelungi pe tot spațiul $\mathscr{X}$ cu păstrarea liniarității și a inegalității (2.16).

Demonstrație. Deoarece $\mathscr{X}$ este un spațiu liniar complex, el este în particular și un spațiu liniar real. Dacă f_0 este o funcțională liniară complexă pe subspațiul liniar $\mathscr{X}_0$ atunci

$$f_0(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

unde f_1 și f_2 sînt funcționale liniare reale pe $\mathscr{X}_0$, considerat ca spațiu liniar real. Din egalitățile

$$i[f_1(x) + i f_2(x)] = i f(x) = f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix)$$

rezultă

$$f_1(ix) = -f_2(x)$$

deci

$$f_0(x) = f_1(x) - i f_1(ix) \tag{2.17}$$

deci, cu teorema lui Hahn-Banach, există funcționala liniară reală g_1 care prelungește f_1 pe tot spațiul $\mathscr{X}$, așa ca

$$g_1(x) \leqslant p(x), \quad (x \in \mathscr{X}). \tag{2.18}$$

Să considerăm acum funcționala complexă

$$f(x) = g_1(x) - i g_1(ix).$$

Cu (2.17) avem $f(x) = f_0(x)$ dacă $x \in \mathscr{X}_0$. În plus se observă imediat că

$$f(ix) = i f(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că f este o funcțională liniară complexă pe $\mathfrak{X}$. Să verificăm inegalitatea

$$|f(x)| \leqslant p(x). \tag{2.19}$$

Pentru $f(x)=0$ este banală. Dacă $f(x)\neq 0$, notînd $\theta=\arg f(x)$, avem cu (2.18)

$$|f(x)| = f(e^{-i\theta}\cdot x) = g_1(e^{-i\theta}\cdot x) \leqslant p(e^{-i\theta}\cdot x) = p(x)$$

adică (2.19).

Teorema este demonstrată.

Teorema 2.6.2. *Dacă p este o seminormă pe spațiul liniar complex $\mathfrak{X}$, atunci pentru orice element $x_0\in\mathfrak{X}$ există o funcțională liniară (complexă) f definită pe $\mathfrak{X}$, așa ca*

$$f(x_0)=p(x_0)$$

$$|f(x)|\leqslant p(x),\ (x\in\mathfrak{X}).$$

Demonstrație. Fie $\mathfrak{X}_0=\mathbf{Sp}(\{x_0\})$. Deci orice element $x\in\mathfrak{X}_0$ este de forma $x=\alpha x_0$ cu $\alpha\in\mathbf{K}$. Pentru orice astfel de element vom pune

$$f_0(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$$

f_0 este o funcțională liniară pe $\mathfrak{X}_0$, $f_0(x_0)=p(x_0)$ și

$$|f_0(\alpha x_0)| = |\alpha| p(x_0) = p(\alpha x_0).$$

Rămîne de aplicat teorema 2.6.1.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

SPAȚII LINIARE TOPOLOGICE

Analiza funcțională consideră spații liniare înzestrate și cu structuri topologice. În prezentul capitol vom introduce noțiunea de spațiu liniar topologic și vom da proprietățile sale generale. Vom considera apoi o clasă importantă de spații liniare topologice și anume cea a spațiilor local convexe. Spațiile liniare topologice au fost introduse în mod sistematic de J. von Neumann și A. N. Kolmogorov. Teoria generală a spațiilor local convexe a luat dezvoltare în urma cercetărilor lui J. Dieudonné și G. W. Mackey.

Spații mai particulare vor fi studiate pe larg în capitolele următoare.

§ 1. SPAȚII LINIARE TOPOLOGICE ȘI PROPRIETĂȚILE LOR

Ca și în capitolul precedent vom nota prin Γ unul din corpurile $\mathbf{R}$, $\mathbf{K}$. Vom considera spații liniare față de corpul Γ (deci reale sau complexe).

1.1. NOȚIUNEA DE SPAȚIU LINIAR TOPOLOGIC

Definiția 1.1.1. *Se numește spațiu liniar topologic un spațiu liniar $\mathfrak{X}$ care este în același timp un spațiu topologic astfel încît următoarele două condiții să fie verificate*[1]:

(1) *aplicația* $(x, y)\to x+y$ a lui $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$ *este continuă;*

(2) *aplicația* $(\alpha, x)\to\alpha x$ *a lui* $\Gamma\times\mathfrak{X}$ *în* $\mathfrak{X}$ *este continuă.*

Cînd condițiile (1) și (2) sînt îndeplinite, se zice că topologia τ a spațiului $\mathfrak{X}$ este *compatibilă* cu structura de spațiu liniar (sau că τ este o *topologie liniară*).

Dacă condiția (1) este îndeplinită, atunci în baza egalității

$$\alpha x-\alpha_0 x_0=(\alpha-\alpha_0)x_0+\alpha_0(x-x_0)+(\alpha-\alpha_0)(x-x_0),$$

condiția (2) din definiția spațiului liniar topologic este echivalentă cu sistemul următoarelor trei condiții:

(i) pentru orice $x_0\in\mathfrak{X}$, aplicația $\alpha\to\alpha x_0$ este continuă în punctul $\alpha=0$;

[1] Atît pe $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ cît și pe $\Gamma\times\mathfrak{X}$ se consideră topologia produs.

Scanned with OKEN Scanner

(ii) pentru orice $\alpha_0 \in \Gamma$, aplicația $x \to \alpha_0 x$ este continuă în punctul $x = \mathbf{0}$;
(iii) aplicația $(\alpha, x) \to \alpha x$ este continuă în punctul $(0, \mathbf{0})$.

Exemple. (1) Să considerăm spațiul liniar $\mathbf{R}^n$. Dacă $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = \{\xi_1^\circ, \xi_2^\circ, \ldots, \xi_n^\circ\}$ atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, vom pune

$$W(x_0; \varepsilon) = \{\mathbf{x} \mid |\xi_j - \xi_j^\circ| < \varepsilon;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

unde $\mathbf{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Pentru fiecare x_0, sistemul tuturor mulțimilor $W(x_0; \varepsilon)$ poate fi luat ca o bază de vecinătăți ale punctului x_0. Topologia definită în acest mod pe $\mathbf{R}^n$ este liniară.

Spațiul $\mathbf{K}^n$ se organizează ca spațiu liniar topologic în același mod.

(2) Să notăm cu $(l_{\mathbf{R}}^{1/2})$ mulțimea tuturor șirurilor $\mathbf{x} = \{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de numere reale pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^{1/2}$ este convergentă. Ea este un spațiu liniar în raport cu operațiile obișnuite cu șirurile.

În $(l_{\mathbf{R}}^{1/2})$ putem introduce o topologie liniară, considerînd ca bază de vecinătăți ale unui punct $\mathbf{x}_0 = \{\xi_n^\circ\}_{n \in \mathbf{N}}$ sistemul mulțimilor de forma

$$W(x_0; \varepsilon) = \{\mathbf{x} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \xi_n^\circ|^{1/2} < \varepsilon\}.$$

(3) Fie T un spațiu topologic separat și $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ spațiul liniar al funcțiilor continue definite pe T cu valori în Γ. Fie Q o mulțime compactă oarecare din T și ε un număr mai mare ca zero, oarecare. Fie $x_0 \in \mathbf{C}_\Gamma(T)$ și să punem

$$W(x_0; Q; \varepsilon) = \{x \mid |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in Q\}$$

Pentru fiecare x_0 sistemul tuturor mulțimilor $W(x_0; Q; \varepsilon)$ poate fi luat ca bază de vecinătăți ale punctului x_0.

Se obține o topologie liniară pe spațiul $\mathbf{C}_\Gamma(T)$.

Definiția 1.1.2. *Se numește subspațiu liniar topologic al unui spațiu liniar topologic $\mathfrak{X}$, orice subspațiu liniar $\mathfrak{X}_0$ înzestrat cu topologia indusă.*

Definiția 1.1.3. *Două spații liniare topologice $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ se zic izomorfe (ca spații liniare topologice) dacă există o bijecție $\mathrm{h} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ cu proprietățile:*

(i) $\mathrm{h}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \mathrm{h}(x_1) + \beta \mathrm{h}(x_2)$

(ii) *aplicația* h *este bicontinuă.*

Exercițiu. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar, $\mathfrak{Y}$ un spațiu liniar topologic și $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un operator liniar. Să se arate că preimaginea prin U a topologiei din $\mathfrak{Y}$ este o topologie liniară pe $\mathfrak{X}$.

1.2. PROPRIETĂȚILE SPAȚIILOR LINIARE TOPOLOGICE

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar topologic. Elementul $\mathbf{0}$ va fi numit *origine*.

Dacă W este o vecinătate a originii, iar x_0 un punct oarecare al lui $\mathfrak{X}$, atunci mulțimea $W + x_0$ este o vecinătate a lui x_0, deoarece aplicația $x \to x + x_0$ a lui $\mathfrak{X}$ pe $\mathfrak{X}$ este un homeomorfism.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea vecinătăților unui punct x_0 coincide cu mulțimea

$$\mathscr{V}_{x_0}=\{V+x_0 | V\in\mathscr{V}\},$$

unde $\mathscr{V}$ este mulțimea vecinătăților originii.

Dacă W este o vecinătate a originii iar $0\neq\alpha\in\Gamma$ atunci și αW este o vecinătate a originii, deoarece aplicația $x\to\alpha x$ a lui $\mathfrak{X}$ pe $\mathfrak{X}$ este un homeomorfism.

Teorema 1.2.1. *Pentru ca un spațiu liniar topologic $\mathfrak{X}$ să fie separat, este necesar și suficient ca pentru orice element $x\neq 0$ să existe o vecinătate W a originii așa ca $x\notin W$.*

Demonstrație. Necesitatea este evidentă. Să stabilim suficiența. Să observăm că, dacă $x\neq 0$, atunci x nu poate fi punct aderent pentru mulțimea $\{0\}$. Într-adevăr, fie W o vecinătate a originii așa ca $-x\notin W$. Atunci $0\notin W+x$, iar $W+x$ este o vecinătate a lui x. Mulțimea $\{0\}$ este deci închisă.

Pe de altă parte, prin aplicația continuă $(x, y)\to x-y$ diagonala spațiului $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ este preimaginea mulțimii 0. Deci diagonala este o mulțime închisă.

Rezultă că spațiul $\mathfrak{X}$ este separat.

Observație. Condiția ca spațiul liniar topologic să fie separat se poate exprima și prin condiția: intersecția tuturor vecinătăților originii se reduce la origine.

Înainte de a da alte proprietăți ale spațiilor liniare topologice, vom introduce unele definiții.

Definiția 1.2.1. *O submulțime A a unui spațiu liniar se numește echilibrată dacă din $|\alpha|\leqslant 1 (\alpha\in\Gamma)$ rezultă $\alpha A\subset A$.*

Observații. (1) *Dacă A este echilibrată și dacă $|\lambda|\leqslant|\mu|$ atunci $\lambda A\subset\mu A$.*

În particular, dacă $|\alpha|=1$, atunci $\alpha A=A$.

(2) Dacă A este o mulțime echilibrată într-un spațiu liniar topologic, atunci și închiderea sa $\overline{A}$ este echilibrată.

Într-adevăr, notînd $S=\{\alpha||\alpha|\leqslant 1\}$, funcția $(\alpha, x)\to\alpha x$ aplică $S\times A$ în A și, fiind continuă, aplică $S\times\overline{A}$ în $\overline{A}$.

Definiția 1.2.2. *Dacă A este o submulțime oarecare a unui spațiu liniar se numește acoperirea echilibrată a lui A mulțimea*

$$\{\alpha x||\alpha|\leqslant 1;\ x\in A\}.$$

Acoperirea echilibrată a unei mulțimi A este cea mai mică mulțime echilibrată care conține pe A.

Lema 1.2.1. *Dacă $\mathscr{W}$ este o bază de vecinătăți ale originii într-un spațiu liniar topologic, atunci și sistemul $\mathscr{W}'$ al acoperirilor echilibrate ale mulțimilor din $\mathscr{W}$ formează o bază de vecinătăți ale originii.*

Demonstrație. Deoarece aplicația $(\alpha, x)\to\alpha x$ este continuă în punctul $(0, 0)$ pentru orice vecinătate W a originii, există un număr $\varepsilon>0$ și o vecinătate W_0 a originii așa ca $\alpha x\in W$ dacă $|\alpha|\leqslant\varepsilon$ și $x\in W_0$. Să punem:

$$W_1=\bigcup_{|\alpha|\leqslant\varepsilon}\alpha W_0.$$

Mulțimea W_1 este echilibrată, este o vecinătate a originii (căci $\varepsilon W_0\subset W_1$) și $W_1\subset W$. Pe de altă parte, există $W_2\in\mathscr{W}$ așa ca $W_2\subset W_1$, și notînd cu W_3 acoperirea echilibrată a lui W_2, avem $W_3\subset W_1$ și deci $W_3\subset W$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.2.2. *Într-un spațiu liniar topologic există o bază de vecinătăți echilibrate și închise ale originii.*

Demonstrație. Aplicația $(x, y)\to x+y$ fiind continuă în punctul $(0, 0)$ al spațiului produs, pentru orice vecinătate W a originii, există o vecinătate W_1 a originii așa ca $W_1+W_1\subset W$. Fie $z\in\overline{W_1}$. Aplicația $(x,y)\to x-y$ fiind continuă în punctul (z, z) există o vecinătate W_2 a lui z așa ca $W_2-W_2\subset W_1$. Există de asemenea $z_0\in W_1\cap W_2$, deoarece z este un punct aderent lui W_1. Din $z\in W_2$ și $z_0\in W_2$ rezultă $z-z_0\in W_1$ și deci $z=(z-z_0)+z_0\in W$. Deci $\overline{W_1}\subset W$. Orice vecinătate W a originii conține deci o vecinătate închisă (a originii) W', iar W' conține o vecinătate (a originii) echilibrată W'' (lema 1.2.1). Mulțimea $\overline{W''}$ este echilibrată și $\overline{W''}\subset W'\subset W$. Mulțimea tuturor vecinătăților echilibrate și închise ale originii formează deci o bază de vecinătăți ale originii.

Definiția 1.2.3. *O submulțime A a unui spațiu liniar $\mathfrak{X}$ se numește mulțime absorbantă, dacă pentru orice $x\in\mathfrak{X}$ există un număr $\varepsilon>0$ așa ca din $0<|\lambda|\leqslant\varepsilon$ să rezulte $\lambda x\in A$.*

Observații. (1) Dacă A este o mulțime echilibrată, atunci, pentru ca ea să fie absorbantă este suficient ca pentru orice element x al spațiului să, existe un număr $\alpha\neq 0$ așa ca $\alpha x\in A$.

Într-adevăr, fie $\lambda\neq 0$ și $|\lambda|\leqslant|\alpha|$. Mulțimea A fiind echilibrată avem $\lambda A\subset\alpha A$ și deci $\lambda\alpha x\in\alpha A$ de unde $\lambda x\in A$.

(2) Într-un spațiu liniar topologic, orice vecinătate a originii este o mulțime absorbantă.

Aceasta rezultă din continuitatea aplicației $\lambda\to\lambda x$ în punctul zero.

Teorema 1.2.3. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar și $\mathscr{W}$ o mulțime de părți ale lui $\mathfrak{X}$, cu următoarele proprietăți.*

(1) *dacă $W_1, W_2\in\mathscr{W}$ atunci există $W_3\in\mathscr{W}$ așa ca $W_3\subset W_1\cap W_2$;*
(2) *dacă $W\in\mathscr{W}$ atunci W este echilibrată;*
(3) *pentru orice $W\in\mathscr{W}$ și $x\in\mathfrak{X}$ există $\alpha\neq 0$, $(\alpha\in\Gamma)$, așa ca $\alpha x\in W$;*
(4) *pentru orice $W\in\mathscr{W}$ există $W_0\in\mathscr{W}$ așa ca $W_0+W_0\subset W$;*
(5) *dacă $W\in\mathscr{W}$ și $\lambda\neq 0$ $(\lambda\in\Gamma)$, atunci $\lambda W\in\mathscr{W}$.*

Atunci, există o topologie liniară τ pe $\mathfrak{X}$ pentru care $\mathscr{W}$ este o bază de vecinătăți ale originii.

Reciproc, în orice spațiu liniar topologic $\mathfrak{X}$ există o bază $\mathscr{W}$ de vecinătăți ale originii, cu proprietățile (1)—(5).

Demonstrație. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar și $\mathscr{W}$ o mulțime de părți ale lui $\mathfrak{X}$ cu proprietățile (1)—(5). Deoarece $\mathbf{0}\in W$, oricare ar fi $W\in\mathscr{W}$ (în baza lui (2)), cu proprietățile (1) și (4) rezultă că sistemul $\mathscr{W}_x=\{W+x\,|\,W\in\mathscr{W}\}$ este o bază de vecinătăți ale punctului x pentru o anumită topologie τ. Într-adevăr, este suficient să observăm că dacă $W\in\mathscr{W}$ și luăm $W_0\in\mathscr{W}$ așa ca $W_0+W_0\subset W$, atunci pentru orice $y\in W_0+x$ avem

$$W_0+y\subset W_0+W_0+x\subset W+x.$$

Din proprietatea (4) rezultă continuitatea aplicației $(x, y)\to x+y$. Din (5) rezultă continuitatea aplicației $x\to\alpha x$ în origine. Din (2) și (3) rezultă că orice mulțime $W\in\mathscr{W}$ este absorbantă și în consecință aplicația $\alpha\to\alpha x$ este continuă în punctul 0. Din (2) rezultă că aplicația $(\alpha, x)\to\alpha x$ este continuă în punctul $(0, \mathbf{0})$. Cu o observație făcută în secțiunea precedentă, din cele arătate rezultă că aplicația $(\alpha, x)\to\alpha x$ este continuă. Deci τ este o topologie liniară.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar topologic, atunci există o bază $\mathscr{W}_0$ de vecinătăți ale originii formată din mulțimi echilibrate (teorema 1.2.2), iar orice vecinătate a originii este o mulțime absorbantă. Deci (1), (2), (3) sînt îndeplinite. Proprietatea (4) rezultă din continuitatea aplicației $(x, y)\to x+y$ în punctul $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, după cum s-a mai remarcat și în demonstrația teoremei 1.2.2. Deoarece pentru $0\neq\lambda\in\Gamma$ aplicația $x\to\lambda x$ este un homeomorfism, dacă $\mathscr{W}_0$ este o bază de vecinătăți ale originii, atunci și sistemul $\mathscr{W}=\{\lambda W | W\in\mathscr{W}_0;\ 0\neq\lambda\in\Gamma\}$ este o bază de vecinătăți ale originii și $\mathscr{W}$ are proprietățile (1)—(5) din enunțul teoremei.

Observații: (1) Dacă în teorema 1.2.3, cerem ca topologia să fie separată, atunci adăugăm condiția

$$\bigcap_{W\in\mathscr{W}} W=\{\mathbf{0}\}.$$

(2) Din proprietățile (2) și (4) ale lui $\mathscr{W}$ din teorema 1.2.3, rezultă că pentru orice $W\in\mathscr{W}$ și orice $\lambda\in\Gamma$ există $W'\in\mathscr{W}$ așa ca $\lambda W'\subset W$.

Într-adevăr, din (4) rezultă că pentru orice $W\in\mathscr{W}$ există $W_1\in\mathscr{W}$ așa ca $2W_1\subset W$. Prin inducție, se arată că pentru orice $n\in\mathbf{N}$ există $W_n\in\mathscr{W}$ așa ca $2^n W_n\subset W$. Deoarece W este echilibrată, din $|\lambda|\leqslant 2^n$ rezultă $\lambda W_n\subset W$.

Cu această observație deducem că, pentru ca pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$ să existe o topologie liniară τ pentru care o mulțime $\mathscr{W}$ de părți ale lui $\mathfrak{X}$ să fie o bază de vecinătăți ale originii, este suficient ca $\mathscr{W}$ să aibă doar primele patru proprietăți din enunțul teoremei 1.2.3.

Fie acum $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar topologic și $\mathfrak{X}_0$ un subspațiu liniar al său. Deoarece funcția $(x, y)\to x+y$ aplică $\mathfrak{X}_0\times\mathfrak{X}_0$ în $\mathfrak{X}_0$, ea fiind continuă aplică $\overline{\mathfrak{X}_0}\times\overline{\mathfrak{X}_0}$ în $\overline{\mathfrak{X}_0}$. Analog, funcția $(\alpha, x)\to\alpha x$ aplică $\Gamma\times\mathfrak{X}_0$ în $\mathfrak{X}_0$ și fiind continuă, aplică $\Gamma\times\overline{\mathfrak{X}_0}$ în $\overline{\mathfrak{X}_0}$. Deci $\overline{\mathfrak{X}_0}$ este un subspațiu liniar.

Dacă A este o submulțime oarecare a spațiului liniar topologic $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{X}_0=\mathbf{Sp}(A)$, atunci $\overline{\mathfrak{X}_0}$ este de asemenea un subspațiu liniar și totodată o mulțime închisă. Mulțimea $\overline{\mathfrak{X}_0}$ se numește *subspațiul liniar închis generat de* A și se notează. $\overline{\mathbf{Sp}}(A)$.

Definiția 1.2.4. *O submulțime A a spațiului liniar topologic $\mathfrak{X}$ se zice mărginită dacă pentru orice vecinătate W a originii există un număr real $\lambda>0$ așa ca $\lambda A\subset W$.*

Pentru ca mulțimea A să fie mărginită, este evident suficient ca proprietatea din definiția 1.2.4 să aibă loc pentru vecinătățile aparținînd unei baze de vecinătăți ale originii.

Deoarece orice vecinătate a originii este o mulțime absorbantă, orice mulțime redusă la un punct este o mulțime mărginită.

Orice submulțime a unei mulțimi mărginite este evident mărginită.

Dacă mulțimea A este mărginită, atunci, pentru orice $\alpha\in\Gamma$ mulțimea αA este de asemenea mărginită.

Dacă A și B sînt mulțimi mărginite, atunci și $A\cup B$ este mărginită.

Într-acevăr, dacă W este o vecinătate echilibrată a originii, există $\alpha>0$ și $\beta>0$ așa ca $A\subset\alpha W$ și $B\subset\beta W$.

Dacă notăm $\gamma=\max(\alpha, \beta)$, atunci $\alpha W\subset\gamma W$ și $\beta W\subset\gamma W$ deoarece W este echilibrată. Rezultă $A\subset\gamma W$ și $B\subset\gamma W$, deci $A\cup B\subset\gamma W$, deci $A\cup B$ este mărginită.

Scanned with OKEN Scanner

Mai general, reuniunea unui număr finit de mulțimi mărginite este o mulțime mărginită. În particular, orice mulțime finită este mărginită.

Teorema 1.2.4. *O mulțime A este mărginită dacă și numai dacă, pentru orice șir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de puncte din A și orice șir $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de numere pozitive care tinde către zero, șirul $\{\lambda_n x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tinde către* $\mathbf{0}$.

Demonstrație. Fie A mărginită și $x_n\in A$, $(n\in\mathbf{N})$. Fie W o vecinătate echilibrată a originii. Există atunci $\varepsilon>0$ așa ca $\varepsilon A\subset W$. Mulțimea W fiind echilibrată, rezultă $\lambda A\subset W$ dacă $|\lambda|\leqslant\varepsilon$. În particular $\lambda x_n\in W$ pentru $|\lambda|\leqslant\varepsilon$. Dacă șirul $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de numere pozitive converge către zero, există n_0 așa ca $\lambda_n\leqslant\varepsilon$ dacă $n\geqslant n_0$. Rezultă $\lambda_n x_n\in W$ dacă $n>n_0$. Am arătat astfel că $\lim\limits_n \lambda_n x_n=\mathbf{0}$.

Reciproc, să presupunem că mulțimea A are proprietatea din enunțul teoremei. Dacă A nu ar fi mărginită, ar exista o vecinătate echilibrată W a originii așa ca $A\not\subset nW$, $(n\in\mathbf{N})$. Deci pentru orice $n\in\mathbf{N}$ există $x_n\in A$ așa ca $x_n\notin nW$, adică $\frac{1}{n}x_n\notin W$. Dar atunci $\left\{\frac{1}{n}x_n\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ nu tinde către $\mathbf{0}$, deși $\lim\limits_n \frac{1}{n}=0$, ceea ce contrazice ipoteza.

Corolar. Pentru ca o mulțime infinită A să fie mărginită, este necesar și suficient ca orice submulțime numărabilă a lui A să fie mărginită.

1.3. SPAȚII LINIARE CVASINORMATE

Definiția 1.3.1. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar și d o distanță în $\mathfrak{X}$. Distanța d se numește invariantă la translații dacă*

$$d(x+z,\ y+z)=d(x,\ y)$$

oricare ar fi $x,\ y,\ z\in\mathfrak{X}$.

Dacă d este o distanță invariantă la translații, atunci funcția q: $\mathfrak{X}\to\mathbf{R}$ dată de formula

$$q(x)=d(x,\ \mathbf{0})$$

are următoarele proprietăți:

(i) $q(x)=0\Leftrightarrow x=\mathbf{0}$;

(ii) $q(x+y)\leqslant q(x)+q(y)$; $(\forall x,\ y\in\mathfrak{X})$;

(iii) $q(-x)=q(x)$, $(\forall x\in\mathfrak{X})$.

Reciproc, orice funcție q: $\mathfrak{X}\to\mathbf{R}$ care are proprietățile (i), (ii), (iii) definește[1] în $\mathfrak{X}$ o distanță invariantă la translații, prin egalitatea

$$d(x,\ y)=q(x-y),\ (x,\ y\in\mathfrak{X}). \tag{1.1}$$

Definiția 1.3.2. *Se numește cvasinormă pe un spațiu liniar $\mathfrak{X}$, orice funcție q: $\mathfrak{X}\to\mathbf{R}$ care are proprietățile* (i), (ii), (iii). *Distanța d dată de formula* (1.1) *se numește distanța asociată cvasinormei q.*

Remarcăm că din (ii), (iii) rezultă de asemenea

$$|q(x)-q(y)|\leqslant q(x-y),\ (\forall x,\ y\in\mathfrak{X}).$$

[1] Din (ii), (iii) rezultă $q(x)\geqslant 0$, $\forall x\in\mathfrak{X}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă pe un spațiu liniar $\mathfrak{X}$ se dă o cvasinormă q, atunci pe $\mathfrak{X}$ se poate considera topologia definită de distanța asociată cvasinormei. Această topologie nu este însă totdeauna o topologie liniară.

Definiția 1.3.3. *Se numește spațiu liniar cvasinormat orice spațiu liniar $\mathfrak{X}$ pe care s-a dat o cvasinormă q, astfel ca aplicația $\alpha \to \alpha x$ a lui Γ în $\mathfrak{X}$ să fie continuă în 0 iar aplicația $x \to \alpha x$ a lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$ să fie continuă în* $\mathbf{0}$ *(în topologia definită de distanța asociată cvasinormei). Dacă în plus, $\mathfrak{X}$ este complet ca spațiu metric atunci el se numește spațiu Fréchet.*

Continuitatea aplicațiilor $\alpha \to \alpha x$, $x \to \alpha x$ respectiv în 0 și $\mathbf{0}$ revine la următoarele două condiții:

(iv) dacă $\lim\limits_n \alpha_n = 0$, $(\alpha_n \in \Gamma)$, atunci $\lim\limits_n q(\alpha_n x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$

(v) dacă $\lim\limits_n q(x_n) = 0$, atunci $\lim\limits_n q(\alpha x_n) = 0$, oricare ar fi $\alpha \in \Gamma$.

Teorema 1.3.1. *Orice spațiu liniar cvasinormat $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar topologic (separat).*

Demonstrație. Deoarece $\mathfrak{X}$ este un spațiu metric, continuitatea aplicațiilor $(x, y) \to x+y$, $(\alpha, x) \to \alpha x$ revine la continuitatea prin șiruri, adică: dacă $\lim\limits_n x_n = x$, $\lim\limits_n y_n = y$ și $\lim\limits_n \alpha_n = \alpha$ atunci

$$\lim_n q((x_n+y_n)-(x+y)) = \lim_n d(x_n+y_n,\ x+y) = 0$$

$$\lim_n q(\alpha_n x_n - \alpha x) = \lim_n d(\alpha_n x_n,\ \alpha x) = 0$$

(unde q este cvasinorma spațiului $\mathfrak{X}$).
Avem

$$q((x_n+y_n)-(x+y)) = q((x_n-x)+(y_n-y)) \leqslant q(x_n-x)+q(y_n-y)$$

de unde rezultă continuitatea operației de adunare.

Rămîne să stabilim continuitatea operației de înmulțire cu scalari.

Fie mai întîi $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de elemente din $\mathfrak{X}$ și $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de numere așa ca $\lim\limits_n q(x_n) = 0$ și $\lim\limits_n \alpha_n = 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ și să notăm

$$\Lambda_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} \{\lambda \mid q(\lambda x_i) \leqslant \varepsilon\}.$$

Mulțimea Λ_n este evident închisă, ca intersecție de mulțimi închise. Avem

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \Gamma. \tag{1.2}$$

Într-adevăr, dacă $\lambda \in \Gamma$, atunci din $\lim\limits_n q(\lambda x_n) = 0$ rezultă că există $n_0 \in \mathbf{N}$ așa ca

$$q(\lambda x_n) \leqslant \varepsilon, \quad (n \geqslant n_0)$$

deci $\lambda \in \Lambda_{n_0}$.

Din (1.2) rezultă atunci că există $n_1 \in \mathbf{N}$ așa ca

$$\operatorname{int} \Lambda_{n_1} \neq \varnothing.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu alte cuvinte există λ_0 și $\delta>0$ așa ca

$$\lambda+\lambda_0\in\Lambda_{n_1} \text{ (dacă } |\lambda|<\delta)$$

sau

$$q((\lambda+\lambda_0)x_n)\leqslant\varepsilon \text{ (dacă } |\lambda|<\delta \text{ și } n\geqslant n_1).$$

Cum $\lim_m \alpha_m=0$, există $m_1\in\mathbf{N}$ așa ca

$$|\alpha_m|<\delta, \text{ (dacă } m\geqslant m_1).$$

Notînd $m_0=\max(n_1, m_1)$, avem

$$q(\alpha_m x_m)\leqslant q((\alpha_m+\lambda_0)x_m)+q(\lambda_0 x_m)\leqslant 2\varepsilon$$

dacă $m\geqslant m_0$.

Am arătat că aplicația $(\alpha, x)\to\alpha x$ este continuă în punctul $(0, \mathbf{0})$ din $\Gamma\times\mathfrak{X}$. Deoarece aplicațiile $\alpha\to\alpha x_0$ și $x\to\alpha_0 x$ sînt continue respectiv în 0 și $\mathbf{0}$ rezultă că aplicația $(\alpha, x)\to\alpha x$ este continuă în (α_0, x_0).

Teorema 1.3.2. *Fie p o seminormă pe spațiul liniar cvasinormat $\mathfrak{X}$, avînd proprietatea: pentru orice mulțime mărginită $A\subset\mathfrak{X}$, mulțimea $p(A)$ este mărginită. Atunci p este continuă pe $\mathfrak{X}$.*

Demonstrație. Fie q cvasinorma considerată pe spațiul $\mathfrak{X}$ și $\lim_n x_n=\mathbf{0}$ adică $\lim_n q(x_n)=0$. Există atunci un șir de numere naturale $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ care tinde către $+\infty$ așa ca $\lim_n \lambda_n\, q(x_n)=0$. Din

$$q(\lambda_n x_n)\leqslant\lambda_n q(x_n)$$

rezultă $\lim_n \lambda_n x_n=\mathbf{0}$, deci șirul $\{\lambda_n x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit. Există atunci $\alpha>0$ așa ca $p(\lambda_n x_n)\leqslant\alpha$. Din

$$p(x_n)=\frac{1}{\lambda_n}p(\lambda_n x_n)\leqslant\frac{\alpha}{\lambda_n}$$

rezultă $\lim_n p(x_n)=0$. Deci p este continuă în origine. Dacă $\lim_n x_n=x$ atunci din

$$|p(x_n)-p(x)|\leqslant p(x_n-x)$$

rezultă că $\lim_n p(x_n)=p(x)$, deci p este continuă în orice punct.

Exemple. (1) Spațiul liniar (s_Γ) al tuturor șirurilor de elemente din Γ (cap. I, 1.1, exemplul (3)) devine un spațiu Fréchet punînd

$$q(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|}$$

(unde $\mathrm{x}=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$).

(2) Fie T un segment de dreaptă reală și să considerăm mulțimea tuturor funcțiilor măsurabile (L) definite pe T cu valori în Γ (adică reale sau complexe). Definim în această mulțime următoarea relație de echivalență: $x\sim y$, dacă $x(t)=y(t)$ aproape peste tot. Vom nota cu $S_\Gamma(T)$ mulțimea tuturor claselor de echivalență. Vom face convenția să notăm o clasă $\widehat{x}$ care conține o funcție x,

tot prin litera x. Cu operațiile liniare obișnuite între clase[1], mulțimea $S_\Gamma(T)$ devine un spațiu liniar. Ea devine un spațiu Fréchet punînd

$$q(x)=\int_T \frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\,dt.$$

Lăsăm verificarea exemplelor ca exerciții.

§ 2. SPAȚII LOCAL CONVEXE

În acest paragraf vom studia spațiile liniare topologice local convexe, care constituie cele mai cercetate spații liniare topologice, datorită proprietăților și aplicațiilor lor importante.

2.1. NOȚIUNEA DE SPAȚIU LOCAL CONVEX

Definiția 2.1.1. *Se numește spațiu local convex un spațiu liniar topologic $\mathfrak{X}$ în care există o bază de vecinătăți convexe ale originii.*

Se mai zice că topologia lui $\mathfrak{X}$ este o *topologie local convexă.*

Spațiile $\mathbf{R}^n$ (sau $\mathbf{K}^n$) și $C_\Gamma(T)$, unde T este un spațiu Hausdorff, sînt exemple de spații local convexe.

Observații. (1) Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu local convex, orice subspațiu liniar topologic al său este un spațiu local convex.

(2) Într-un spațiu local convex există o bază de vecinătăți echilibrate și convexe ale originii.

Într-adevăr, dacă W este o vecinătate a originii, există o vecinătate convexă W_0 a originii așa ca $W_0 \subset W$. Punînd

$$W_1=\bigcap_{|\lambda|\geq 1}\lambda W_0$$

mulțimea W_1 este o vecinătate echilibrată și convexă a originii inclusă în W.

2.2. TOPOLOGIA DEFINITĂ DE O FAMILIE DE SEMINORME

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar și $\mathcal{P}=\{p_j\}_{j\in J}$ o familie oarecare de seminorme pe $\mathfrak{X}$. să considerăm sistemul $\mathcal{W}$ al tuturor mulțimilor de forma

$$W(j_1, j_2, \ldots, j_n;\ \varepsilon)=\{x \mid p_{j_i}(x)<\varepsilon;\ i=1, 2, \ldots, n\} \qquad (2.1)$$

cu $j_i \in J$ și $\varepsilon>0$. Vom arăta că aceste mulțimi sînt convexe și că $\mathcal{W}$ are proprietățile (1)—(5) din teorema 1.2.3.

Dacă $x, y \in W(j_1, j_2, \ldots, j_n;\ \varepsilon)$ iar $0\leq\lambda\leq 1$, atunci $p_{j_i}(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq$ $\leq\lambda p_{j_i}(x)+(1-\lambda)p_{j_i}(y)<\lambda\varepsilon+(1-\lambda)\varepsilon=\varepsilon$ deci $\lambda x+(1-\lambda)y \in W(j_1, j_2, \ldots, j_n;$ $\varepsilon)$. Orice mulțime de forma (2.1) este deci convexă.

---

[1] Adică $\widehat{x}+\widehat{y}$ este clasa care conține $x+y$, iar $\widehat{\alpha x}$ clasa care conține αx.

Scanned with OKEN Scanner

Să stabilim proprietățile din teorema 1.2.3.

Dacă $W_1=W(j_1', j_2', \ldots, j_n'; \varepsilon')$, $W_2=W(j_1'', j_2'', \ldots, j_m''; \varepsilon'')$ și punem $\varepsilon=\min(\varepsilon', \varepsilon'')$ și

$$W_3=W(j_1', j_2', \ldots, j_n', j_1'', j_2'', \ldots, j_m''; \varepsilon)$$

avem evident $W_3 \subset W_1 \cap W_2$, deci proprietatea (1) este verificată.

Dacă $\alpha \in \Gamma$ și $|\alpha| \leqslant 1$, atunci din $p_{j_i}(x)<\varepsilon$ rezultă $p_{j_i}(\alpha x)<\varepsilon$ deci, orice mulțime de forma (2.1) este echilibrată (proprietatea (2)).

Fie $x \in \mathfrak{X}$ și să notăm cu W_0 mulțimea dată de (2.1). Fie $\lambda \in \Gamma$ așa ca $0<|\lambda|<\varepsilon$ și să punem

$$\mu=\max_{i=1}^{n} p_{j_i}(x).$$

Dacă $x \notin W_0$ și punem $\alpha=\lambda\mu^{-1}$ atunci

$$p_{j_i}(\alpha x)=|\lambda|\,\mu^{-1}p_{j_i}(x) \leqslant |\lambda|<\varepsilon$$

deci $\alpha x \in W_0$. Am verificat astfel proprietatea (3).

Să notăm iarăși cu W_0 mulțimea dată de (2.1) și să punem $W_1=$ $=W(j_1, j_2, \ldots, j_n; 2^{-1}\varepsilon)$. Atunci:

$$W_1+W_1=\frac{1}{2}W_0+\frac{1}{2}W_0=W_0$$

deci $\mathscr{W}$ are proprietatea (4).

În sfîrșit, dacă $W_0=W(j_1, j_2, \ldots, j_n; \varepsilon)$ și $\alpha \in \Gamma$ cu $\alpha \neq 0$ atunci

$$\alpha W_0=\{\alpha x | p_{j_k}(x)<\varepsilon;\ k=1, 2, \ldots, n\}=\{x | p_{j_k}(x)<|\alpha|\varepsilon;\ k=1, 2, \ldots, n\}=$$

$$=W(j_1, j_2, \ldots, j_n;\ |\alpha|\varepsilon)$$

adică $\alpha W_0 \in \mathscr{W}$. Deci $\mathscr{W}$ are și proprietatea (5).

Am arătat deci că sistemul $\mathscr{W}$ definește pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$ o topologie τ local convexă.

Se spune că τ este „topologia definită de familia $\mathcal{P}$ de seminorme".

Definiția 2.2.1. *O familie $\mathcal{P}=\{p_j\}_{j \in J}$ de seminorme pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$ se zice că este suficientă dacă pentru orice element $x \neq \mathbf{0}$ al lui $\mathfrak{X}$ există $j \in J$ așa ca $p_j(x) \neq 0$.*

O familie suficientă $\mathcal{P}=\{p_j\}_{j \in J}$ de seminorme definește o topologie separată.

Într-adevăr, dacă $x \in W$ oricare ar fi $W \in \mathscr{W}$, atunci $p_j(x)<\varepsilon$ oricare ar fi $j \in J$ și $\varepsilon>0$. Deci $p_j(x)=0$ oricare ar fi $j \in J$, deci $x=\mathbf{0}$.

Reciproc, dacă topologia definită de familia $\mathcal{P}=\{p_j\}_{j \in J}$ de seminorme este separată, atunci familia este suficientă.

Într-adevăr, dacă am avea $p_j(x)=0$ oricare ar fi $j \in J$, atunci $x \in W$ oricare ar fi $W \in \mathscr{W}$, deci $x=\mathbf{0}$.

2.3. SEMINORME PE SPAȚII LOCAL CONVEXE

În această secțiune vom demonstra că dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu local convex, atunci există o familie de seminorme care definește topologia spațiului.

Fie τ topologia lui $\mathfrak{X}$ și să notăm cu $\mathscr{W}$ o bază de vecinătăți echilibrate și convexe ale originii în $\mathfrak{X}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice $W \in \mathscr{W}$ și $x \in \mathfrak{X}$ să punem

$$p_W(x) = \inf \{\mu | x \in \mu W;\ \mu > 0\}. \tag{2.1}$$

Remarcăm că mulțimea W, fiind absorbantă, pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, există $\varepsilon > 0$ așa ca $\lambda x \in W$ dacă $0 \neq |\lambda| < \varepsilon$. Deci

$$x \in \frac{1}{\lambda} W, \quad (0 \neq |\lambda| < \varepsilon)$$

astfel că

$$(\varepsilon^{-1}, +\infty) \subset \{\mu | x \in \mu W;\ \mu > 0\}.$$

Să arătăm că p_W este o seminormă[1].

Fie $x, y \in \mathfrak{X}$ și să considerăm un număr $\varepsilon > 0$ oarecare. Să punem

$$\lambda = \frac{p_W(x) + \varepsilon}{p_W(x) + p_W(y) + 2\varepsilon}.$$

Avem $0 < \lambda < 1$ și

$$1 - \lambda = \frac{p_W(y) + \varepsilon}{p_W(x) + p_W(y) + 2\varepsilon}.$$

Din definiția lui p_W rezultă

$$x \in [p_W(x) + \varepsilon] W, \quad y \in [p_W(y) + \varepsilon] W$$

sau

$$\frac{1}{p_W(x) + \varepsilon} x \in W, \quad \frac{1}{p_W(y) + \varepsilon} y \in W.$$

Mulțimea W fiind convexă, rezultă

$$\lambda \frac{1}{p_W(x) + \varepsilon} x + (1 - \lambda) \frac{1}{p_W(y) + \varepsilon} y \in W$$

sau

$$\frac{1}{p_W(x) + p_W(y) + 2\varepsilon} (x + y) \in W$$

sau încă

$$x + y \in [p_W(x) + p_W(y) + 2\varepsilon] W.$$

De aici rezultă (cu definiția lui p_W)

$$p_W(x + y) \leqslant p_W(x) + p_W(y) + 2\varepsilon$$

și cum ε a fost arbitrar

$$p_W(x + y) \leqslant p_W(x) + p_W(y).$$

Fie acum $x \in \mathfrak{X}$ și un număr oarecare $\alpha > 0$. Avem

$$p_W(\alpha x) = \inf \{\mu | \alpha x \in \mu W;\ \mu > 0\} = \inf \{\mu | x \in \frac{\mu}{\alpha} W;\ \mu > 0\} =$$

$$= \alpha \inf \{\frac{\mu}{\alpha} | x \in \frac{\mu}{\alpha} W;\ \frac{\mu}{\alpha} > 0\} = \alpha p_W(x).$$

[1] Ea se numește *seminorma lui Minkowski* asociată lui W. Definiția lui p_W și faptul că este o seminormă se bazează pe faptul că W este absorbantă, echilibrată și convexă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $0 \neq \alpha \in \Gamma$, atunci $\alpha = |\alpha|\beta$ cu $|\beta| = 1$. Ținînd seama că W este echilibrată și deci $\beta^{-1}W = W$, rezultă că $p_W(\beta x) = p_W(x)$ deci

$$p_W(\alpha x) = p_W(|\alpha|\beta x) = |\alpha| p_W(\beta x) = |\alpha| p_W(x).$$

Este apoi evident că $p(\mathbf{0}) = 0$.

Am demonstrat deci că, oricare ar fi $W \in \mathscr{W}$, p_W este o seminormă. Mulțimea $\{p_W\}_{W \in \mathscr{W}}$ definește o topologie local convexă τ' pe $\mathfrak{X}$ luînd ca bază de vecinătăți ale originii sistemul mulțimilor de forma

$$E(W_1, W_2, \ldots, W_n; \varepsilon) = \{x | p_{W_i}(x) < \varepsilon;\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Să arătăm că $\tau' = \tau$.

Dacă $W \in \mathscr{W}$, atunci

$$E(W; 1) \subset W,$$

după cum se verifică imediat.

Invers, fie $E(W_1, W_2, \ldots, W_n; \varepsilon)$ și să punem

$$W = \bigcap_{j=1}^{n} W_j,$$

Dacă $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, atunci $\varepsilon' W \subset E(W_1, W_2, \ldots, W_n; \varepsilon)$ și $\varepsilon' W$ este o vecinătate a originii în topologia τ.

În concluzie $\tau' = \tau$, adică topologia τ a spațiului $\mathfrak{X}$ este definită de familia de seminorme $\{p_W\}_{W \in \mathscr{W}}$.

2.4. MULȚIMI DIRIJATE DE SEMINORME. COMPARAREA TOPOLOGIILOR LOCAL CONVEXE

Dacă p_1 și p_2 sînt două seminorme pe un spațiu liniar $\mathfrak{X}$, vom pune $p_1 \leqslant p_2$ dacă $p_1(x) \leqslant p_2(x)$, oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$. O mulțime $\mathscr{P}$ de seminorme pe spațiul $\mathfrak{X}$ este *dirijată*, dacă pentru orice $p_1, p_2 \in \mathscr{P}$ există $p_3 \in \mathscr{P}$ așa ca $p_1 \leqslant p_3$ și $p_2 \leqslant p_3$.

Dacă $\mathscr{P}$ este o mulțime oarecare de seminorme pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$, atunci mulțimea $\mathscr{P}'$ a tuturor seminormelor de forma

$$p'(x) = \max \{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)\}$$

unde $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ este un sistem finit oarecare de seminorme din $\mathscr{P}$ este o mulțime dirijată de seminorme, care definește aceeași topologie ca și $\mathscr{P}$.

Cu cele arătate în secțiunile 2.2 și 2.3 rezultă:

Teorema 2.4.1. *Dacă $\mathscr{P}$ este o mulțime dirijată de seminorme pe un spațiu liniar $\mathfrak{X}$, atunci mulțimea $\mathscr{P}$ definește o topologie local convexă pe $\mathfrak{X}$, luînd ca bază de vecinătăți ale originii, sistemul tuturor mulțimilor de forma*

$$W(p; \varepsilon) = \{x | p(x) < \varepsilon\},\ (p \in \mathscr{P};\ 0 < \varepsilon \in \mathbf{R}).$$

Reciproc, pe orice spațiu local convex există o mulțime dirijată de seminorme, care definește topologia spațiului.

Teorema 2.4.2. *Fie $\mathscr{P}'$ și $\mathscr{P}''$ două mulțimi dirijate de seminorme pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$. Topologia definită de $\mathscr{P}'$ este majorată de cea definită de $\mathscr{P}''$*

Scanned with OKEN Scanner

dacă și numai dacă pentru orice $p' \in \mathcal{P}'$ *există* $p'' \in \mathcal{P}''$ *și un număr* $\lambda > 0$ *așa ca*

$$p'(x) \leqslant \lambda p''(x)$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că dacă p este o seminormă pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$, atunci

$$p(x) = \inf \{\alpha \mid x \in \alpha W\ (p;\ 1);\ \alpha > 0\}.$$

Să presupunem că topologia definită de $\mathcal{P}'$ este majorată de cea definită de $\mathcal{P}''$. Dacă $p' \in \mathcal{P}'$, există $p'' \in \mathcal{P}''$ și $\beta > 0$ așa ca

$$W(p'';\ \beta) \subset W(p';\ 1).$$

Rezultă

$$\frac{1}{\beta} p''(x) = \frac{1}{\beta} \inf \{\mu \mid x \in \mu W(p'';\ 1);\ \mu > 0\} =$$

$$= \inf \{\mu \mid x \in \mu W(p'';\ \beta);\ \mu > 0\} \geqslant p'(x)$$

deci notînd $\lambda = \beta^{-1}$ obținem

$$\lambda p''(x) \geqslant p'(x).$$

Reciproc, dacă această inegalitate are loc, atunci

$$W(p'';\ \varepsilon\lambda^{-1}) \subset W(p';\ \varepsilon)$$

și teorema este demonstrată.

Definiția 2.4.1. *Două mulțimi dirijate* $\mathcal{P}'$ *și* $\mathcal{P}''$ *de seminorme (definite pe același spațiu liniar* $\mathfrak{X}$*) se zic echivalente, dacă:*

(i) *pentru orice* $p' \in \mathcal{P}'$ *există* $p'' \in \mathcal{P}''$ *și un număr* $\lambda > 0$ *așa ca* $p'(x) \leqslant \lambda p''(x)$ *oricare ar fi* $x \in \mathfrak{X}$;

(ii) *pentru orice* $p'' \in \mathcal{P}''$ *există* $p' \in \mathcal{P}'$ *și un număr* $\mu > 0$ *așa ca* $p''(x) \leqslant \mu p'(x)$ *oricare ar fi* $x \in \mathfrak{X}$.

Din teorema 2.4.2. rezultă:

Corolar 2.4.1. *Mulțimile dirijate* $\mathcal{P}'$ *și* $\mathcal{P}''$ *de seminorme pe spațiul liniar* $\mathfrak{X}$ *definesc aceeași topologie dacă și numai dacă sînt echivalente.*

Exemple. (1) Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar n-dimensional și $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază algebrică în acest spațiu. Pentru orice element $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ al lui $\mathfrak{X}$ să punem

$$p_0(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2}.$$

Atunci p_0 este o seminormă care se anulează numai pentru $x = \mathbf{0}$. Familia $\{p_0\}$ compusă din singura seminormă p_0 este deci suficientă. Ea definește o topologie de spațiu local convex în $\mathfrak{X}$ considerînd ca bază de vecinătăți ale originii mulțimile de forma

$$W(p_0;\ \varepsilon) = \{x \mid p_0(x) < \varepsilon\}.$$

Se poate demonstra că orice topologie local convexă pe spațiul $\mathfrak{X}$ coincide cu topologia definită de p_0. Se deduce, de asemenea că spațiile liniare topologice separate finit dimensionale sînt izomorfe între ele dacă au aceeași dimensiune.

(2) Spaţiul liniar (s) al tuturor şirurilor de numere reale este un spaţiu local convex separat dacă se consideră topologia definită de familia $\mathcal{P}=\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a seminormelor de forma

$$p_n(x)=\max_{j=1}^{n}|\xi_j|$$

unde $x=\{\xi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$.

(3) Fie T un spaţiu Haudorff şi $\mathbf{C}(T)$ spaţiul funcţiilor reale continue pe T. Pentru orice mulţime compactă $Q\subset T$ să punem

$$p_Q(x)=\sup\{|x(t)||t\in Q\}.$$

Cu topologia definită de familia tuturor acestor seminorme $\mathbf{C}(T)$ este un spaţiu local convex separat.

(4) Să notăm cu $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe dreapta reală şi care sînt indefinit derivabile. Ea este un spaţiu liniar dacă se consideră adunarea obişnuită şi înmulţirea cu numere obişnuită. Ea devine un spaţiu local convex separat dacă se consideră topologia definită de familia $\mathcal{P}=\{p_{n,\,m}\}_{n,\,m\in\mathbf{N}}$ a seminormelor de forma

$$p_{n,\,m}(x)=\sup\{|x^{m-1}(t)||t\in[-n,\ n]\}$$

unde $x\in\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$.

Exerciţii. (1) Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu local convex şi $\mathcal{P}$ o mulţime de seminorme care defineşte topologia τ a lui $\mathfrak{X}$. Fie p_0 o seminormă continuă (oarecare) pe spaţiul $\mathfrak{X}$ şi $\mathcal{P}_0$ mulţimea de seminorme care se obţine adăugînd la $\mathcal{P}$, seminorma p_0. Să se arate că topologia definită de $\mathcal{P}_0$ coincide cu τ.

(2) Să se arate că dacă $\mathcal{P}$ este o mulţime de seminorme care defineşte topologia unui spaţiu local convex $\mathfrak{X}$ iar $A\subset\mathfrak{X}$, atunci A este mărginită dacă şi numai dacă pentru orice $p\in\mathcal{P}$ mulţimea de numere $p(A)$ este mărginită.

(3) Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu local convex separat, în care topologia poate fi definită de o familie numărabilă $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de seminorme. Să se arate că punînd

$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)}$$

se obţine o cvasinormă pe $\mathfrak{X}$ care defineşte topologia τ.

2.5. FUNCŢIONALE LINIARE ŞI CONTINUE

Dacă f este o funcţională liniară definită pe un spaţiu liniar topologic $\mathfrak{X}$ şi dacă f este continuă într-un punct x_0, atunci f este continuă în orice punct. Într-adevăr, pentru orice număr $\varepsilon>0$ există o vecinătate W a originii aşa ca

$$x\in W+x_0\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Dacă x_1 este un punct oarecare al lui $\mathfrak{X}$, atunci din $x\in W+x_1$ rezultă

$$x-x_1+x_0\in W+x_0$$

şi deci

$$x\in W+x_1\Rightarrow|f(x)-f(x_1)|<\varepsilon$$

adică f este continuă în punctul x_1.

Scanned with OKEN Scanner

Continuitatea lui f pe $\mathfrak{X}$ este deci echivalentă cu continuitatea sa în origine.

Teorema 2.5.1. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu local convex și $\mathcal{P}$ o mulțime dirijată de seminorme care definește topologia spațiului. Pentru ca o funcțională liniară f definită pe $\mathfrak{X}$ să fie continuă este necesar și suficient să existe $p_0 \in \mathcal{P}$ și un număr $\mu > 0$ așa ca*

$$|f(x)| \leqslant \mu p_0(x), \quad (x \in \mathfrak{X}). \tag{2.2}$$

Demonstrație. Dacă f este continuă (în origine), atunci există o vecinătate W a originii așa ca $|f(x)| < 1$ dacă $x \in W$. Cu teorema 2.4.1. există $p_0 \in \mathcal{P}$ și $\eta > 0$ așa ca

$$\{x | p_0(x) < \eta\} \subset W. \tag{2.3}$$

Deci $p_0(x) < \eta \Rightarrow |f(x)| < 1$.

Fie acum $x \in \mathfrak{X}$ oarecare și $\varepsilon > 0$ de asemenea oarecare.

Să punem

$$x' = \frac{\eta}{p_0(x) + \varepsilon} x.$$

Avem $p_0(x') < \eta$, de unde rezultă $|f(x')| < 1$ adică

$$\left| f\left(\frac{\eta}{p_0(x)+\varepsilon} x\right) \right| < 1$$

sau

$$|f(x)| < \frac{1}{\eta} (p_0(x) + \varepsilon)$$

și cum ε a fost arbitrar

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\eta} p_0(x).$$

Are deci loc (2.2) dacă luăm $\mu = \eta^{-1}$.

Reciproc, dacă are loc (2.2) atunci f este evident continuă în origine și fiind liniară este continuă în orice punct.

Teorema 2.5.2. *Fie G un subspațiu liniar închis al unui spațiu local convex $\mathfrak{X}$ și un element $x_0 \notin G$. Există atunci o funcțională liniară și continuă f pe $\mathfrak{X}$ așa ca $f(x_0) = 1$ și $f(x) = 0$, $\forall x \in G$.*

Demonstrație. Există o vecinătate W a originii așa ca

$$(W - x_0) \cap G = \varnothing.$$

căci $-x_0 \notin G$. Dacă $\mathcal{P}$ este o mulțime dirijată de seminorme care definește topologia lui $\mathfrak{X}$, atunci există $p_0 \in \mathcal{P}$ și $\eta > 0$ așa ca (2.3) să aibă loc. Deci:

$$p_0(x + x_0) \geqslant \eta, \quad \forall x \in G.$$

Să punem acum

$$G_0 = \mathrm{Sp}(G \cup \{x_0\})$$

și să definim o funcțională f_0 pe G_0 prin formula

$$f_0(x + \lambda x_0) = \lambda, \quad (x \in G; \ \lambda \in \Gamma).$$

Această funcțională este liniară și avem

$$|f_0(y)| \leqslant \frac{1}{\eta} p_0(y), \quad (y \in G_0).$$

În baza teoremelor 2.5.1 și 2.6.1 din Cap. I, există o prelungire f a lui f_0 pe $\mathfrak{X}$ astfel ca f să fie liniară și

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\eta} p_0(x), \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Funcționala f are proprietățile din enunțul teoremei.

Corolar 2.5.1. *Pentru orice element $x_0 \neq 0$ al unui spațiu local convex separat $\mathfrak{X}$, există o funcțională liniară și continuă f pe $\mathfrak{X}$ așa ca $f(x_0) \neq 0$.*

Într-adevăr, mulțimea $G = \{0\}$ este un subspațiu liniar închis al lui $\mathfrak{X}$ deoarece $\mathfrak{X}$ este un spațiu separat. În baza teoremei 2.5.2 există o funcțională liniară și continuă f pe $\mathfrak{X}$ așa ca $f(x_0) = 1$.

2.6. TOPOLOGIA SLABĂ PE UN SPAȚIU LOCAL CONVEX

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu local convex separat.

Vom nota cu $\mathfrak{X}^*$ mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe spațiul $\mathfrak{X}$. Cu operațiile obișnuite, $\mathfrak{X}^*$ este un spațiu liniar numit *conjugatul* (sau *dualul*) lui $\mathfrak{X}$.

Pentru orice $f \in \mathfrak{X}^*$ funcționala p_f pe $\mathfrak{X}$ dată de formula

$$p_f(x) = |f(x)|, \quad (x \in \mathfrak{X}) \tag{2.4}$$

este o seminormă pe $\mathfrak{X}$. Topologia definită de sistemul seminormelor $\{p_f\}_{f \in \mathfrak{X}^*}$ se numește *topologia slabă*[1] pe $\mathfrak{X}$ și se notează $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ sau numai σ. Deoarece familia tuturor seminormelor de forma (2.4) este suficientă (corolarul 2.5.1) topologia slabă este separată. O mulțime închisă (sau deschisă) în topologia slabă se va zice mulțime slab închisă (resp. slab deschisă). Analog se vor utiliza denumirile de mulțime slab compactă, funcțională slab continuă, etc. Spațiul liniar $\mathfrak{X}$ înzestrat cu topologia slabă se notează uneori $\mathfrak{X}(\sigma)$. Dacă τ este topologia inițială a spațiului $\mathfrak{X}$ se va folosi uneori și notația $\mathfrak{X}(\tau)$ pentru a arăta că se consideră pe $\mathfrak{X}$ topologia τ. Este evident că $\sigma \leqslant \tau$.

Dacă G este un subspațiu liniar închis al spațiului $\mathfrak{X}$, atunci G este și slab închis.

Într-adevăr, dacă $x_0 \notin G$, atunci cu teorema 2.5.2 există $f \in \mathfrak{X}^*$ așa ca $f(x_0) = 1$ și $f(x) = 0$, $\forall x \in G$. Punînd

$$W = \{x | p_f(x) < 1\}$$

mulțimea $W + x_0$ este o (σ)-vecinătate a lui x_0 disjunctă de G (căci dacă $x \in G$ atunci $|f(x - x_0)| = 1$ deci $x - x_0 \notin W$). Rezultă că x_0 nu este slab aderent lui G și în consecință G este slab închis.

Pe spațiul liniar $\mathfrak{X}^*$ se poate considera topologia local convexă definită de mulțimea tuturor seminormelor q_x de forma

$$q_x(f) = |f(x)|, \quad (f \in \mathfrak{X}^*)$$

unde $x \in \mathfrak{X}$. Această topologie se va numi *topologia slabă*[2] pe $\mathfrak{X}^*$ și se va nota $\sigma(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{X})$ sau σ^*.

---

[1] Se numește și *topologia slăbită* pe spațiul $\mathfrak{X}$.

[2] Ea se mai numește și *topologia slabă** pe $\mathfrak{X}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Vom da mai întîi o definiție care are sens în spații liniare oarecare.

Definiția 2.7.1. *Fie A și B două submulțimi ale unui spațiu liniar $\mathfrak{X}$. Se zice că mulțimea B absoarbe mulțimea A (sau că A este absorbită de B) dacă există un număr $\varepsilon>0$ așa ca $\lambda A \subset B$ dacă $0<|\lambda|\leqslant\varepsilon$.*

Observații. (1) Din definițiile 1.2.3 și 2.7.1 rezultă că o mulțime absorbantă este o mulțime care absoarbe orice punct al spațiului.

(2) Dacă B este o mulțime echilibrată, atunci pentru ca B să absoarbă o mulțime A, este suficient să existe un număr $\varepsilon>0$ așa ca $\varepsilon A \subset B$.

Într-adevăr, din $0<|\lambda|\leqslant\varepsilon$ rezultă $\varepsilon^{-1}B\subset\lambda^{-1}B$ și deci $A\subset\lambda^{-1}B$.

(3) Într-un spațiu liniar topologic $\mathfrak{X}$, o submulțime A este mărginită, dacă și numai dacă este absorbită de orice vecinătate a originii.

Definiția 2.7.2. *Se numește spațiu bornologic, orice spațiu local convex $\mathfrak{X}$, având următoarea proprietate: dacă E este o submulțime echilibrată și convexă care absoarbe orice submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}$, atunci E este o vecinătate a originii.*

Teorema 2.7.1. *Un spațiu local convex $\mathfrak{X}$ este un spațiu bornologic, dacă și numai dacă are următoarea proprietate: dacă q este o seminormă care este mărginită pe orice submulțime mărginită a spațiului $\mathfrak{X}$, atunci q este continuă pe $\mathfrak{X}$.*

Demonstrație. Să presupunem că $\mathfrak{X}$ este un spațiu bornologic și fie q o seminormă mărginită pe orice submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}$. Punînd

$$E=\{x|q(x)\leqslant 1\}$$

mulțimea E este echilibrată și convexă. Fie A o submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}$. Există deci un număr $\alpha>0$ așa ca $q(x)\leqslant\alpha$ oricare ar fi $x\in A$. Rezultă $A\subset\alpha E$, deci E absoarbe A. Spațiul $\mathfrak{X}$ fiind bornologic, mulțimea E este o vecinătate a originii, de unde rezultă că seminorma q este continuă în origine. Cu inegalitatea

$$|q(x)-q(x_0)|\leqslant q(x-x_0)$$

rezultă că seminorma q este continuă în orice punct x_0.

Reciproc, să presupunem că $\mathfrak{X}$ este un spațiu local convex, avînd proprietatea din enunțul teoremei. Fie E o submulțime echilibrată și convexă a spațiului $\mathfrak{X}$, care absoarbe orice submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}$. Să considerăm seminorma q_E dată de formula

$$q_E(x)=\inf\{\mu|x\in\mu E;\ \mu>0\}.$$

Dacă A este o submulțime mărginită oarecare a lui $\mathfrak{X}$, atunci există $\alpha>0$ așa ca $A\subset\alpha E$, de unde rezultă că seminorma q_E este mărginită pe A. Prin ipoteza q_E este atunci continuă pe $\mathfrak{X}$, deci punînd

$$E_0=\{x|q_E(x)<1\},$$

mulțimea E_0 este o vecinătate a originii. Din $E_0\subset E$ rezultă atunci că E este o vecinătate a originii.

Deci $\mathfrak{X}$ este un spațiu bornologic.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 2.7.1. *O funcțională liniară f pe un spațiu bornologic $\mathfrak{X}$ este continuă, dacă și numai dacă pentru orice submulțime mărginită A a lui $\mathfrak{X}$, $f(A)$ este mărginită.*

Într-adevăr, f este continuă dacă și numai dacă seminorma q dată de formula $q(x)=|f(x)|$ este continuă.

Observație. Dacă topologia unui spațiu local convex separat poate fi definită de o familie numărabilă de seminorme (deci dacă topologia este metrizabilă) atunci spațiul este bornologic.

Lăsăm verificarea ca exercițiu.

2.8. LIMITE INDUCTIVE DE SPAȚII LOCAL CONVEXE

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar și $\{\mathfrak{X}_j\}_{j\in J}$ o familie de subspații liniare ale lui $\mathfrak{X}$ așa ca

$$\mathfrak{X}=\bigcup_{j\in J}\mathfrak{X}_j.$$

Vom presupune că familia $\{\mathfrak{X}_j\}_{j\in J}$ este dirijată față de incluziune (deci pentru orice $j_1, j_2\in J$ există $j_3\in J$ așa ca $\mathfrak{X}_{j_1}\subset\mathfrak{X}_{j_3}$ și $\mathfrak{X}_{j_2}\subset\mathfrak{X}_{j_3}$).

Vom presupune de asemenea că fiecare $\mathfrak{X}_j$ este un spațiu local convex cu o topologie τ_j și că dacă $\mathfrak{X}_{j_1}\subset\mathfrak{X}_{j_2}$ atunci topologia $\tau_{j_2j_1}$ indusă de τ_{j_2} pe $\mathfrak{X}_{j_1}$ este majorată de topologia τ_{j_1}.

Fie acum $\mathscr{W}$ mulțimea tuturor submulțimilor echilibrate și convexe W ale lui $\mathfrak{X}$, având proprietatea: pentru orice $j\in J$, mulțimea $W\cap\mathfrak{X}_j$ este o vecinătate a originii în spațiul $\mathfrak{X}_j$. Mulțimea $\mathscr{W}$ reprezintă o bază de vecinătăți ale originii pentru o topologie local convexă τ pe spațiul $\mathfrak{X}$. Topologia τ se numește *limita inductivă a topologiilor* τ_j, iar spațiul $\mathfrak{X}$ înzestrat cu topologia τ se numește *limita inductivă a spațiilor* $\mathfrak{X}_j$. Se notează

$$\mathfrak{X}=\varinjlim_{j\in J}\mathfrak{X}_j,$$

Dacă este îndeplinită în plus condiția: $\mathfrak{X}_{j_1}\subset\mathfrak{X}_{j_2}$ implică $\tau_{j_2j_1}=\tau_{j_1}$, atunci limita inductivă se zice că este *strictă*. Se spune că topologia τ este *limita inductivă strictă* a topologiilor τ_j, respectiv că spațiul $\mathfrak{X}$ este limita inductivă strictă a spațiilor $\mathfrak{X}_j$.

Exercițiu. Fie $\mathfrak{X}=\varinjlim_{j\in J}\mathfrak{X}_j$ (și τ topologia lui $\mathfrak{X}$). Pentru orice $j\in J$ să considerăm „aplicația canonică" l_j a lui $\mathfrak{X}_j$ în $\mathfrak{X}$, adică $l_j(x)=x$, oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}_j$.

Să se demonstreze că topologia τ este cea mai fină topologie local convexă pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$ pentru care toate aplicațiile canonice sînt continue.

Lema 2.8.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu local convex, $\mathfrak{X}_0$ un subspațiu liniar topologic, iar V_0 o vecinătate echilibrată și convexă a originii în $\mathfrak{X}_0$, atunci există o vecinătate echilibrată și convexă V a originii în $\mathfrak{X}$ așa ca $V\cap\mathfrak{X}_0=V_0$.*

Demonstrație. Cu definiția topologiei induse și ținînd seama că spațiul $\mathfrak{X}$ este local convex, există o vecinătate echilibrată și convexă W a originii în $\mathfrak{X}$ așa ca

$$W\cap\mathfrak{X}_0\subset V_0.$$

Să punem (a se vedea cap. I)

$$V=\mathrm{co}(V_0\cup W)$$

Mulțimea V este o vecinătate echilibrată și convexă a originii în spațiul $\mathfrak{X}$ Să arătăm că satisface condiția din enunțul lemei.

Dacă $z \in V$, atunci z este de forma (a se vedea teorema 1.3.3 din cap. I)

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y,$$

cu $x \in V_0$, $y \in W$ și $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Dacă $z \in V \cap \mathfrak{X}_0$ și $\alpha = 1$, atunci $z = x \in V_0$. Dacă $z \in V \cap \mathfrak{X}_0$ și $\alpha \neq 1$, atunci $y \in \mathfrak{X}_0$ (căci $z \in \mathfrak{X}_0$ și $\alpha x \in \mathfrak{X}_0$), deci

$$y \in W \cap \mathfrak{X}_0 \subset V_0$$

adică $y \in V_0$. Rezultă că $z \in V_0$. Deci $V \cap \mathfrak{X}_0 \subset V_0$. Incluziunea contrară este evidentă.

Teorema 2.8.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ este limita inductivă strictă a unui șir crescător $\{\mathfrak{X}'_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de spații local convexe, atunci topologia indusă pe $\mathfrak{X}_n$ de topologia τ din $\mathfrak{X}$ coincide cu topologia inițială τ_n a lui $\mathfrak{X}_n$.*

Demonstrație. Să notăm cu τ'_n topologia indusă de τ pe $\mathfrak{X}_n$. Atunci $\tau'_n \leqslant \tau_n$ după cum rezultă din definiția topologiei τ.

Fie acum V_n o vecinătate echilibrată și convexă a originii în spațiul $\mathfrak{X}_n$ cu topologia τ_n. În baza lemei precedente, există o vecinătate echilibrată și convexă V_{n+1} a originii în spațiul $\mathfrak{X}_{n+1}(\tau_{n+1})$ așa ca

$$V_{n+1} \cap \mathfrak{X}_n = V_n.$$

Prin inducție rezultă existența unui șir crescător $\{V_{n+m}\}_{m \in \mathbf{N}}$ de mulțimi astfel ca fiecare V_{n+m} să fie o vecinătate echilibrată și convexă a originii în spațiul $\mathfrak{X}_{n+m}(\tau_{n+m})$ iar

$$V_{n+m} \bigcap \mathfrak{X}_n = V_n \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Să punem

$$V = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} V_{n+m}.$$

Mulțimea V este echilibrată și convexă iar pentru orice $k \in \mathbf{N}$, mulțimea $V \cap \mathfrak{X}_k$ este o vecinătate a originii în $\mathfrak{X}_k(\tau_k)$ după cum se poate verifica[1]. Deci V este o vecinătate a originii în spațiul $\mathfrak{X}$ și cum

$$V \bigcap \mathfrak{X}_n = V_n$$

rezultă $\tau_n \leqslant \tau'_n$. În concluzie $\tau'_n = \tau_n$.

Teorema 2.8.2. *Dacă $\mathfrak{X} = \varinjlim_{j \in J} \mathfrak{X}_j$ și dacă orice spațiu $\mathfrak{X}_j$ este bornologic atunci $\mathfrak{X}$ este bornologic.*

Demonstrație. Fie E o mulțime echilibrată și convexă a lui $\mathfrak{X}$, care absoarbe orice submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}$. Punînd

$$E_j = E \bigcap \mathfrak{X}_j$$

obținem o submulțime echilibrată și convexă a lui $\mathfrak{X}_j$, care absoarbe orice submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}_j$. Cum $\mathfrak{X}_j$ este bornologic, E_j este o vecinătate a originii în spațiul $\mathfrak{X}_j$.

Cu definiția topologiei în $\mathfrak{X}$ rezultă că mulțimea E este o vecinătate a originii. Deci $\mathfrak{X}$ este bornologic.

---

[1] Pentru $k \leqslant n$, ținem seama de incluziunea $V_n \cap \mathfrak{X}_k \subset V \cap \mathfrak{X}_k$ iar pentru $k > n$ de: $V_{n+m} = V \cap \mathfrak{X}_{n+m}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

SPAȚII LINIARE NORMATE

Un spațiu liniar normat este un spațiu liniar pe care s-a dat o anumită „normă", adică o seminormă care se anulează numai în origine. Cu topologia definită de distanța asociată normei, un spațiu liniar normat este un spațiu liniar topologic. Spațiile liniare normate complete au fost introduse și studiate de S. Banach în 1922, aceste spații numindu-se astăzi *spații Banach*.

§ 1. SPAȚIILE LINIARE NORMATE ȘI PROPRIETĂȚILE LOR

În acest paragraf vom studia spațiile liniare normate oarecare sau de diferite tipuri, fără a presupune că sînt complete.

1.1. NOȚIUNEA DE SPAȚIU LINIAR NORMAT

Definiția 1.1.1. *O seminormă p definită pe un spațiu liniar $\mathfrak{X}$ se numește normă, dacă din $p(x)=0$ rezultă $x=\mathbf{0}$.*

O normă este deci în același timp o cvasinormă.

Definiția 1.1.2. *Se numește spațiu liniar normat (pe scurt spațiu normat) un spațiu liniar $\mathfrak{X}$ pe care este dată o anumită normă p.*

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu normat cu norma p, se notează $||x||=p(x)$.

Un spațiu liniar normat este deci un spațiu liniar $\mathfrak{X}$ pe care s-a dat o funcțională reală $x\to||x||$ cu următoarele proprietăți[1]

(i) $||x||=0\Rightarrow x=\mathbf{0}$;

(ii) $||x+y||\leqslant||x||+||y||$, $(\forall x,\ y\in\mathfrak{X})$;

(iii) $||\alpha x||=|\alpha|\,||x||$, $(\forall\alpha\in\Gamma;\ \forall x\in\mathfrak{X})$.

Echivalența dintre condițiile $||x||=0$ și $x=\mathbf{0}$ rezultă din (i) și (iii). Amintim de asemenea că din (ii) și (iii) rezultă

$$|\,||x||-||y||\,|\leqslant||x-y||. \tag{1.1}$$

Un spațiu normat se zice real sau complex, după cum $\Gamma=\mathbf{R}$ sau $\Gamma=\mathbf{K}$.

[1] Amintim că se notează prin Γ unul din corpurile R, K.

Scanned with OKEN Scanner

Într-un spațiu liniar normat $\mathfrak{X}$, se consideră distanța d asociată normei

$$d(x, y)=||x-y||, \quad (x, y\in\mathfrak{X})$$

și topologia definită de această distanță (numită topologia normei). Convergența în topologia normei se numește *convergența în normă*.

Dacă $x_0\in\mathfrak{X}$ iar $0<\rho\in\mathbf{R}$, sfera deschisă cu centrul x_0 și raza ρ este mulțimea

$$S(x_0;\ \rho)=\{x|\,||x-x_0||<\rho\}.$$

Sfera închisă, cu același centru și aceeași rază se va nota prin $\overline{S}(x_0,\ \rho)$; deci

$$\overline{S}(x_0;\ \rho)=\{x|\,||x-x_0||\leqslant\rho\}.$$

Sfera $\overline{S}(\mathbf{0};\ 1)$ se numește *sfera unitate închisă* în spațiul $\mathfrak{X}$.

Propoziția[1] 1.1.1. *Închiderea sferei deschise* $S(x_0;\ \rho)$ *este sfera închisă* $\overline{S}(x_0;\ \rho)$.

Demonstrație. Să notăm $S_0=S(x_0;\ \rho)$, $S_1=\overline{S}(x_0;\ \rho)$, $E=\{x|\,||x-x_0||=\rho\}$. Evident, $S_1=S_0\cup E$. Fie $x\in E$. Să considerăm un șir $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de numere reale așa ca $0<\varepsilon_n<1$ și $\varepsilon_n\to 0$. Notînd

$$x_n=\varepsilon_n x_0+(1-\varepsilon_n)x$$

avem

$$||x_n-x_0||=(1-\varepsilon_n)||x-x_0||<\rho$$

deci $x_n\in\overline{S}_0$. Deoarece $x_n\to x$, rezultă $x\in\overline{S}_0$. Am arătat astfel că $S_1\subset\overline{S}_0$. Fie acum $x\in\overline{S}_0$. Există atunci un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente din S_0 așa ca $x=\lim\limits_n x_n$. Rezultă $\lim\limits_n||x_n-x_0||=||x-x_0||$ și cum $||x_n-x_0||<\rho$ rezultă $||x-x_0||\leqslant\rho$. Deci $x\in S_1$, adică am arătat că $\overline{S}_0\subset S_1$.

Propoziția este demonstrată.

Observație. Orice spațiu liniar normat este un spațiu liniar cvasinormat și un spațiu bornologic.

Definiția 1.1.3. *Două spații liniare normate* $\mathfrak{X}$ *și* $\mathfrak{Y}$ *se zic izomorfe, dacă există o bijecție* h: $\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ *cu proprietățile*

$$1^\circ\cdot\, h(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha h(x_1)+\beta h(x_2)$$

$$2^\circ\cdot\, ||h(x)||=||x||.$$

Dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații liniare normate izomorfe, atunci $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt izomorfe și ca spații liniare topologice. Reciproca nu este adevărată.

Definiția 1.1.4. *Două norme* p_1, p_2 *definite pe același spațiu liniar* $\mathfrak{X}$ *se zic echivalente, dacă există două numere* λ, $\mu>0$, *așa ca*

$$\lambda p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\mu p_1(x), \quad (\forall x\in\mathfrak{X}).$$

Cu corolarul 2.4.1 cap. II, două norme pe același spațiu liniar $\mathfrak{X}$ definesc aceeași topologie dacă și numai dacă sînt echivalente.

[1] Această propoziție nu este adevărată în orice spațiu metric.

Exemple. (1) Spațiul liniar Γ^n (adică $\mathbf{R}^n$ sau $\mathbf{K}^n$) se organizează ca spațiu liniar normat, punînd pentru $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$

$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2}.$$

Această normă se numește *norma euclidiană.*

(2) Să notăm cu (l_Γ) mulțimea tuturor șirurilor $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente ale lui Γ pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ este convergentă. Dacă $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $y=\{\eta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ sînt elemente din (l_Γ) iar $\alpha\in\Gamma$, atunci definind

$$x+y=\{\xi_n+\eta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

$$\alpha x=\{\alpha\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \quad (\alpha\in\Gamma)$$

mulțimea (l_Γ) devine un spațiu liniar. Acest spațiu liniar se organizează ca spațiu liniar normat punînd

$$||x|| = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|.$$

(3) Fie T un spațiu topologic compact și să notăm cu $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor continue definite pe T, cu valori în Γ. Cu operațiile liniare obișnuite, $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ este un spațiu liniar, iar formula

$$||x|| = \max_{t\in T} |x(t)|, \quad (x\in\mathbf{C}_\Gamma(T))$$

definește o normă pe $\mathbf{C}_\Gamma(T)$.

(4) Să considerăm mulțimea tuturor funcțiilor definite pe un segment T al dreptei reale, cu valori în Γ, care sînt integrabile Lebesgue. Vom defini în această mulțime următoarea relație de echivalență: $x\sim y$ dacă $x(t)=y(t)$ a.p.t. (aproape peste tot).

Vom nota cu $\mathbf{L}_\Gamma(T)$ mulțimea tuturor claselor de echivalență. Dacă $\hat{x}$ este clasa care conține x, vom defini $\hat{x}+\hat{y}$ ca fiind clasa care conține $x+y$ iar $\alpha\hat{x}$ (pentru $\alpha\in\Gamma$) clasa care conține αx. Mulțimea $\mathbf{L}_\Gamma(T)$ devine atunci un spațiu liniar. Vom conveni să notăm tot cu litera x clasa $\hat{x}$ determinată de x. Se verifică imediat că formula

$$||x|| = \int_T |x(t)|\,dt, \quad (x\in\mathbf{L}_\Gamma(T))$$

definește o normă pe $\mathbf{L}_\Gamma(T)$. În acest spațiu $\lim_n x_n = x$ înseamnă:

$$\lim_n \int_T |x_n(t)-x(t)|\,dt = 0.$$

Convergența unui șir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de funcții integrabile, către funcția x, dată de ultima egalitate se numește de obicei *convergența în medie.*

Scanned with OKEN Scanner

1.2. SPAȚII NORMATE FINIT DIMENSIONALE ȘI APROXIMAREA ELEMENTELOR ÎN SPAȚII NORMATE

Teorema 1.2.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar normat m-dimensional, atunci $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar topologic izomorf cu spațiul Γ^n (cu topologia obișnuită*[1]*).*

Demonstrație. Să considerăm o bază algebrică

$$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$$

și să punem

$$p\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j\right)=\left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2\right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Formula (1.2) definește o normă pe spațiul liniar $\mathfrak{X}$, după cum se verifică cu ușurință. Pentru a demonstra teorema este evident suficient să arătăm că norma inițială a spațiului $\mathfrak{X}$ este echivalentă cu norma p.

Să considerăm norma obișnuită în Γ^m și să punem

$$A=\{a\in\Gamma^m \mid \|a\|=1\}.$$

Mulțimea A este compactă în Γ^m (fiind mărginită și închisă). Dacă $a=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}\in A$, vom nota

$$x(a)=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j.$$

Deoarece

$$\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2=1$$

rezultă $x(a)\neq 0$. Să considerăm funcția reală f definită pe A prin formula

$$f(a)=\|x(a)\|.$$

Ea este continuă, după cum se verifică cu ușurință. Mulțimea A fiind compactă, există cea mai mică valoare γ a lui f pe A și evident $\gamma>0$.

Am arătat deci că dacă $x=\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j$ și $\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2=1$ atunci $\|x\|\geqslant\gamma$.

Dacă x este un element arbitrar, nenul, al lui $\mathfrak{X}$ și anume $x=\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j$, atunci pentru elementul

$$y=\left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2\right)^{-\frac{1}{2}} x$$

avem evident $\|y\|\geqslant\gamma$. Punînd $\mu=\gamma^{-1}$ avem

$$p(x)\leqslant\mu\|x\|, \quad (\forall x\in\mathfrak{X}).$$

---

[1] Topologia dată de norma din 1.1 exemplul (1). Teorema este adevărată și dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar topologic separat m-dimensional oarecare (a se vedea de ex. R. Cristescu, Spații liniare topologice. Editura Academiei, 1974).

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte

$$\left\| \sum_{h=1}^{m} \xi_h e_h \right\| \leqslant \sum_{h=1}^{m} |\xi_h| \|e_h\| \leqslant \sum_{h=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} \|e_h\| = \sum_{h=1}^{m} \|e_h\| p(x).$$

Notînd $\lambda = \left(\sum_{h=1}^{m} \|e_h\| \right)^{-1}$ avem deci

$$\lambda \|x\| \leqslant p(x), \quad (\forall x \in \mathfrak{X}).$$

Deci norma $\|\cdot\|$ dată pe spațiul $\mathfrak{X}$ este echivalentă cu p.
Teorema este demonstrată.

Observații. (1) Într-un spațiu normat finit-dimensional convergența în normă este echivalentă cu convergența coordonatelor într-o bază algebrică E. Cu alte cuvinte, dacă $x_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nm})_E$ și $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)_E$ atunci $x = \lim_n x_n$ este echivalentă cu: $\xi_j = \lim_n \xi_{nj}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

(2) Într-un spațiu liniar normat, orice subspațiu liniar finit dimensional este o mulțime închisă.

(3) Dacă G este un subspațiu liniar finit dimensional al unui spațiu liniar normat $\mathfrak{X}$, atunci topologia indusă pe G, coincide cu topologia definită de norma (1.2) (unde elementele $e_1, e_2, \ldots, e_n$ formează o bază algebrică a lui G).

Teorema 1.2.2. *Dacă G este un subspațiu liniar finit dimensional al unui spațiu liniar normat $\mathfrak{X}$, atunci, pentru orice element $x_0 \in \mathfrak{X}$ funcția*

$$f(y) = \|x_0 - y\|, \quad (y \in G) \tag{1.3}$$

are un minim.

Demonstrație. Dacă $x_0 \in G$, atunci $f(x_0) = 0$ este cea mai mică valoare a funcției f. Să presupunem că $x_0 \notin G$. Să considerăm un element oarecare $y_1 \in G$ și fie $\gamma = \|x_0 - y_1\|$. Să considerăm mulțimea

$$A = \{y \in G | f(y) \leqslant \gamma\}.$$

Dacă $y \in A$, atunci

$$\|y\| \leqslant \|x_0 - y\| + \|x_0\| \leqslant \gamma + \|x_0\|.$$

Să notăm $\delta = \gamma + \|x_0\|$ și să punem

$$B = \{y \in G | \|y\| \leqslant \delta\}.$$

Avem $A \subset B$ iar B este compactă, fiind o submulțime mărginită și închisă a lui G. Funcția f fiind continuă pe B, există $y_0 \in B$ așa ca $f(y_0)$ să fie valoarea minimă a funcției f pe B și evident pe G.

Observație. Elementul y_0 din teorema 1.2.2 se numește *element de cea mai bună aproximare* în G pentru *elementul* x_0. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază algebrică în G, atunci existența minimului funcției date de (1.3) revine la existența a m numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ așa ca expresia

$$\left\| x_0 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \right\| \tag{1.4}$$

să fie minimă.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Fie T un segment pe dreapta reală și să considerăm spațiul liniar normat $C_{\mathbf{R}}(T)$ cu norma obișnuită (adică cea dată în 1.1, exemplul (3)). În baza teoremei 1.2.2, pentru orice funcție reală continuă x_0 pe T și orice $n \in \mathbf{N}$ există un polinom y de grad cel mult n, pentru care expresia

$$\max_{t \in T} |x_0(t) - y(t)|$$

are cea mai mică valoare.

Într-adevăr, dacă punem $e_j(t) = t^{j-1}$, $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ atunci putem considera subspațiul liniar generat de $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ și ținem seama că expresia (1.4) (în care $m = n+1$) are un minim.

1.3. PRODUSE FINITE DE SPAȚII LINIARE NORMATE

Vom stabili mai întîi cîteva leme.

Lema 1.3.1. *Dacă* α, β, p, q *sînt numere reale așa ca* α, $\beta > 0$ *iar* p, $q > 1$ *și dacă*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{1.5}$$

atunci

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{1.6}$$

Demonstrație. Să considerăm funcția

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}, \quad (t > 0). \tag{1.7}$$

Se verifică imediat că ea are un minim în punctul $t = 1$ cu $f(1) = 1$. Înlocuind t prin $\alpha^{1/q}\,\beta^{-1/p}$ în (1.7), obținem

$$1 \leqslant \frac{1}{p}\alpha^{p/q}\beta^{-1} + \frac{1}{q}\alpha^{-1}\beta^{q/p}$$

și înmulțind cu $\alpha\beta$ obținem (1.6).

Lema 1.3.2. *Dacă* $\alpha_j, \beta_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *iar* p *și* q *sînt numere reale mai mari ca unu și satisfăcînd* (1.5), *atunci*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\beta_j \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^q\right)^{1/q}. \tag{1.8}$$

Demonstrație. Presupunem că cel puțin unul dintre numerele α_j și cel puțin unul din numerele β_j sînt nenule. Dacă în (1.6) punem

$$\alpha = \frac{\alpha_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p}}, \qquad \beta = \frac{\beta_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^q\right)^{1/q}}$$

obținem

$$\frac{\alpha_i\beta_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{\alpha_i^p}{p\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p} + \frac{\beta_i^q}{q\sum_{j=1}^{n} \beta_j^q}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă sumăm în raport cu i și ținem seama de (1.5), obținem imediat (1.8).

Inegalitatea (1.8) este cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Hölder.*

Lema 1.3.3. *Dacă* $\alpha_j, \beta_j \geqslant 0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, *iar* $p \geqslant 1$, *atunci*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^p\right)^{1/p}. \tag{1.9}$$

Demonstrație. Pentru $p=1$, relația (1.9) are loc cu semnul egal. Pentru $p>1$, cu inegalitatea lui Hölder, avem

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^p = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^{p-1}(\alpha_j+\beta_j) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^{p-1}\alpha_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^{p-1}\beta_j \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j+\beta_j)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j^p\right)^{1/p}\right],$$

de unde rezultă imediat (1.9).

Inegalitatea (1.9) este cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Minkovski.*

Teorema 1.3.1. *Fie* $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ *spații liniare normate iar* $\mathfrak{X}$ *spațiul liniar produs al acestor spații. Topologia produs în* $\mathfrak{X}$ *este definită de norma*

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \max_{j=1}^{n} \|x_j\| \tag{1.10}$$

Demonstrație. Faptul că formula (1.10) definește o normă se verifică cu ușurință. Topologia definită de această normă se obține luînd ca bază de vecinătăți ale originii, mulțimea tuturor sferelor

$$S(\mathbf{0}; \rho) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | \|x_j\| < \rho;\ j=1, 2, \ldots, n\}.$$

Dacă considerăm în fiecare spațiu $\mathfrak{X}_j$ sfera

$$S_j(\mathbf{0}; \rho) = \{x_j | x_j \in \mathfrak{X}_j;\ \|x_j\| < \rho\}$$

atunci

$$S(\mathbf{0}; \rho) = \prod_{j=1}^{n} S_j(\mathbf{0}; \rho)$$

de unde rezultă că topologia definită de norma (1.10) coincide cu topologia produs.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Pentru orice număr $p \geqslant 1$, formula

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} ||x_j||^p \right)^{1/p} \tag{1.11}$$

definește o normă pe spațiul liniar produs $\mathfrak{X} = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{X}_j$.

Într-adevăr, condițiile (i) și (ii) din sect. 1.1 se verifică imediat, iar condiția (iii) rezultă cu inegalitatea lui Minkovski.

Se poate arăta că norma dată de formula (1.10) și cea dată de formula (1.11) sînt echivalente.

Cînd nu vom face altă mențiune, dacă $\mathfrak{X} = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{X}_j$ unde $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ sînt spații liniare normate, atunci vom considera pe $\mathfrak{X}$ norma dată de formula (1.10) și vom numi $\mathfrak{X}$ *spațiul normat produs* (al spațiilor $\mathfrak{X}_j$).

1.4. SPAȚIU LINIAR NORMAT CÎT

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar normat și G un subspațiu liniar închis al lui $\mathfrak{X}$. În spațiul cît $\mathfrak{X}/G$ se poate lua următoarea normă

$$||\widehat{x}|| = \inf \{||x'|| \mid x' \in \widehat{x}\}, \quad (\widehat{x} \in \mathfrak{X}/G). \tag{1.12}$$

Să verificăm îndeplinirea condițiilor (i), (ii), (iii) din 1.1. Fie $\widehat{x}|| = 0$. Există atunci $x_n \in \widehat{x}$, $(n \in \mathbf{N})$ cu $||x_n|| \to 0$, deci cu $x_n \to \mathbf{0}$. Cum G este un subspațiu închis, orice clasă $\widehat{x}$ este o mulțime închisă în $\mathfrak{X}$, deoarece $\widehat{x} = x + G$. Rezultă $\mathbf{0} \in \widehat{x}$, deci $\widehat{x} = G = \widehat{\mathbf{0}}$, adică $\widehat{x}$ este elementul nul al spațiului cît Am verificat astfel condiția (i).

Fie acum $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathfrak{X}/G$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există atunci $x_0 \in \widehat{x}$ și $y_0 \in \widehat{y}$, așa ca

$$||x_0|| < ||\widehat{x}|| + \varepsilon, \quad ||y_0|| < ||\widehat{y}|| + \varepsilon.$$

Rezultă

$$||\widehat{x} + \widehat{y}|| \leqslant ||x_0 + y_0|| \leqslant ||x_0|| + ||y_0|| < ||\widehat{x}|| + ||\widehat{y}|| + 2\varepsilon.$$

Cum ε a fost arbitrar, deducem

$$||\widehat{x} + \widehat{y}|| \leqslant ||\widehat{x}|| + ||\widehat{y}||$$

adică și condiția (ii) este îndeplinită.

Condiția (iii) se verifică imediat.

Spațiul $\mathfrak{X}/G$ înzestrat cu norma (1.12) se numește *spațiul normat cît* (al lui $\mathfrak{X}$ prin G).

Observație. Se poate demonstra că norma (1.12) definește pe $\mathfrak{X}/G$ topologia cît.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.5.1. *Un spațiu normat* $\mathfrak{X}$ *se zice separabil*[1] *dacă există o submulțime numărabilă* A *densă în spațiul* $\mathfrak{X}$.

Deci dacă $\mathfrak{X}$ este separabil, există o submulțime numărabilă A astfel ca orice element $x \in \mathfrak{X}$ să se reprezinte sub forma $x = \lim_n x_n$ cu $x_n \in A$.

Observație. Un spațiu normat finit dimensional este separabil.

Într-adevăr, să presupunem că $\mathfrak{X}$ este un spațiu real și fie E o bază algebrică în $\mathfrak{X}$. Atunci mulțimea A a elementelor $x = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)_E$ unde ρ_j sînt numere raționale, este numărabilă și densă în $\mathfrak{X}$.

Lăsăm cititorului să considere cazul cînd $\mathfrak{X}$ este un spațiu complex.

Într-un spațiu liniar normat, noțiunea de serie convergentă de elemente se introduce prin definiția obișnuită

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_n \sum_{j=1}^{n} x_j$$

dacă limita din membrul drept există.

Definiția 1.5.2. *Un spațiu normat* $\mathfrak{X}$ *se zice că admite o bază Schauder dacă există un șir* $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *de elemente ale lui* $\mathfrak{X}$ *astfel ca orice element* $x \in \mathfrak{X}$ *să se reprezinte în mod unic sub forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n. \tag{1.13}$$

Șirul $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ se zice că este o bază Schauder a lui $\mathfrak{X}$.

Teorema 1.5.1. *Un spațiu normat care admite o bază Schauder este un spațiu separabil.*

Demonstrație. Vom presupune că $\mathfrak{X}$ este un spațiu real (lăsînd cititorului cazul spațiului complex). Fie $\{e_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ o bază Schauder a spațiului normat $\mathfrak{X}$. Să notăm cu A mulțimea tuturor elementelor de forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} \rho_k e_k$$

unde ρ_k sînt numere raționale iar $n \in \mathbf{N}$. Este evident că A este numărabilă. Să arătăm că A este densă în $\mathfrak{X}$.

Fie x un element oarecare al lui $\mathfrak{X}$, reprezentat sub forma (1.13). Notînd

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$$

avem deci $x = \lim_n x_n$. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ să alegem numerele raționale $\rho_{n1}, \rho_{n2}, \ldots, \rho_{nn}$ așa ca

$$|\rho_{nk} - \xi_k| < \frac{1}{n^2 \|e_k\|}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

[1] Definiția are sens și dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu topologic oarecare.

Scanned with OKEN Scanner

și să notăm

$$x'_n = \sum_{k=1}^{n} \rho_{nk} e_k .$$

Avem $x'_n \in A$ și

$$\|x'_n - x_n\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\rho_{nk} - \xi_k| \cdot \|e_k\| < \frac{1}{n} .$$

Din inegalitatea

$$\|x'_n - x\| \leqslant \|x'_n - x_n\| + \|x_n - x\|$$

și din relațiile

$$\lim_n \|x'_n - x_n\| = \lim_n \|x_n - x\| = 0$$

rezultă $\lim_n x'_n = x$.

Observație. În anul 1972, P. Enflo a arătat că există spații normate separabile (complete) fără bază Schauder[1].

Exemplu. (1) Spațiul $(l_{\mathbf{R}})$ este separabil.

Într-adevăr, să considerăm mulțimea A a elementelor de forma

$$r = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, 0, 0, \ldots\},$$

unde ρ_k sînt numere raționale, iar n este un număr natural variabil. Mulțimea A este evident numărabilă. Să arătăm că este densă în $(l_{\mathbf{R}})$.

Fie $x = \{\xi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ un element arbitrar al spațiului. Pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ să considerăm numerele raționale $\rho_{n1}, \rho_{n2}, \ldots, \rho_{nn}$ așa ca

$$|\rho_{nk} - \xi_k| < \frac{1}{n^2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă notăm

$$r'_n = \{\rho_{n1}, \rho_{n2}, \ldots, \rho_{nn}, 0, 0, \ldots\}$$

atunci $r'_n \in A$ și $\lim_n \|r'_n - x\| = 0$.

Deci spațiul $(l_{\mathbf{R}})$ este separabil.

De altfel, se poate arăta că spațiul $(l_{\mathbf{R}})$ este cu bază Schauder, de unde rezultă că este și separabil. Într-adevăr, notînd cu δ_{kn} simbolul lui Kroenecker[2] se poate arăta că șirul elementelor

$$e_n = \{\delta_{kn}\}_{n \in \mathbf{N}}$$

poate fi luat ca bază Schauder în spațiul $(l_{\mathbf{R}})$.

§ 2. SPAȚII BANACH

În acest paragraf vom considera spații liniare normate care sînt complete ca spații metrice.

[1] A se vedea: Per Enflo, A counter example to the approximation problem in Banach spaces. Acta Math. 130 (1973), 309–317.

[2] $\delta_{kn} = 1$ dacă $n = k$ și $\delta_{kn} = 0$ dacă $n \neq k$.

Ca în orice spațiu metric, se poate vorbi de șiruri Cauchy de elemente ale unui spațiu normat[1]. În particular se poate vorbi de spații normate complete.

Definiția 2.1.1. *Se numește spațiu Banach, orice spațiu liniar normat care este complet ca spațiu metric (în raport cu distanța asociată normei).*

În baza teoremei 1.2.2, orice spațiu normat care este finit dimensional este un spațiu Banach.

Definiția 2.1.2. *Dacă* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *este un șir de elemente ale unui spațiu Banach* $\mathfrak{X}$ *și dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ *este convergentă, se zice că seria* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă.*

Într-un spațiu Banach o serie absolut convergentă este convergentă.

Într-adevăr, dacă

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad \sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

atunci

$$\|s_n - s_m\| \leqslant |\sigma_n - \sigma_m| \tag{2.1}$$

deci $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy.

În teorema următoare, vom considera spațiul liniar normat produs, cu norma dată de formula (1.10) din secțiunea 1.3.

Teorema 2.1.1. *Dacă* $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$ *sînt spații Banach, atunci spațiul liniar normat produs* $\mathfrak{X}$ *al acestor spații este de asemenea un spațiu Banach.*

Demonstrație. Fie $\{x^m\}_{m\in\mathbf{N}}$ un șir Cauchy de elemente ale spațiului $\mathfrak{X}$ și anume

$$x^m = (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}), \quad (m\in\mathbf{N}).$$

Pentru orice număr $\varepsilon>0$, există $l_\varepsilon\in\mathbf{N}$ așa ca

$$\|x^j - x^k\| < \varepsilon, \quad (j, k > l_\varepsilon)$$

de unde rezultă

$$\|x_{ji} - x_{ki}\| < \varepsilon, \quad (i=1, 2, \ldots, n;\ j, k > l_\varepsilon).$$

Există atunci elementele $x_i\in\mathfrak{X}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ așa ca

$$x_i = \lim_k x_{ki} \text{ și deci}$$

$$\|x_{ji} - x_i\| \leqslant \varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n;\ j > l_\varepsilon).$$

Notînd $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rezultă

$$\|x^j - x\| \leqslant \varepsilon, \quad (j > l_\varepsilon)$$

și teorema este demonstrată.

---

[1] Ținînd seama de definiția distanței asociată normei, un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente ale unui spațiu normat, este un șir Cauchy dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$, există $k_\varepsilon\in\mathbf{N}$ astfel ca $\|x_n - x_m\|<\varepsilon$ dacă $n, m>k_\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

În teorema următoare vom considera spațiul liniar normat cît, cu norma dată de formula (1.12) din secțiunea 1.4.

Teorema 2.1.2. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Banach, iar G este un subspațiu liniar închis al lui $\mathfrak{X}$, atunci $\mathfrak{X}/G$ este un spațiu Banach.*

Demonstrație. Să considerăm un șir Cauchy $\{\hat{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathfrak{X}/G$. Să extragem din acest șir un subșir $\{\hat{x}_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ așa ca

$$\|\hat{x}_{k_{n+1}}-\hat{x}_{k_n}\|<\frac{1}{2^{n+1}}. \tag{2.2}$$

În baza definiției normei în spațiul cît, pentru orice n există $y_n\in\hat{x}_{k_{n+1}}-\hat{x}_{k_n}$ așa ca

$$\|y_n\|<\|\hat{x}_{k_{n+1}}-\hat{x}_{k_n}\|+\frac{1}{2^{n+2}}<\frac{1}{2^n}.$$

De aici rezultă că seria

$$x_{k_1}+\sum_{j=1}^{\infty}y_j$$

unde $x_{k_1}\in\hat{x}_{k_1}$ este absolut convergentă, și cum $\mathfrak{X}$ este complet, ea converge către un element x. Să arătăm că $\hat{x}_n\to\hat{x}$ (unde $\hat{x}\ni x$). Fie pentru $n\geqslant 2$

$$s_n=x_{k_1}+\sum_{j=1}^{n-1}y_j.$$

Avem evident, $s_n\in\hat{x}_{k_n}$ deci

$$\|\hat{x}_{k_n}-\hat{x}\|\leqslant\|s_n-x\|,$$

deci $\|\hat{x}_{k_n}-\hat{x}\|\to 0$. În sfîrșit, din

$$\|\hat{x}_n-\hat{x}\|\leqslant\|\hat{x}_n-\hat{x}_{k_n}\|+\|\hat{x}_{k_n}-\hat{x}\|$$

ținînd seama că $\{\hat{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir Cauchy, rezultă $\|\hat{x}_n-\hat{x}\|\to 0$. ▫

2.2. COMPLETAREA UNUI SPAȚIU LINIAR NORMAT

În această secțiune vom arăta că, dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar normat care nu este complet, atunci există un spațiu liniar normat complet $\widetilde{\mathfrak{X}}$ astfel ca $\mathfrak{X}$ să fie izomorf cu un subspațiu liniar dens al lui $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Se identifică de obicei $\mathfrak{X}$ cu imaginea sa, deci se consideră $\mathfrak{X}$ ca un subspațiu al lui $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Se zice că $\widetilde{\mathfrak{X}}$ s-a obținut din $\mathfrak{X}$ prin completare și că $\widetilde{\mathfrak{X}}$ este *completatul* lui $\mathfrak{X}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie deci $\mathfrak{X}$ un spațiu normat care nu este complet. Să considerăm mulțimea tuturor șirurilor Cauchy $\bar{x}=\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente ale lui $\mathfrak{X}$ în care să introducem următoarea relație de echivalență: $\bar{x}\sim\bar{y}$ dacă $\lim_n \|x_n-y_n\|=0$ (unde $\bar{y}=\{y_n\}_{n\in N}$). Vom nota prin $\tilde{\mathfrak{X}}$ mulțimea tuturor claselor de echivalență. Clasa care conține $\bar{x}$ va fi notată cu $\tilde{x}$.

Pentru a introduce operațiile de adunare și înmulțire cu numere să observăm că, dacă $\{x_n\}_{n\in N}$ și $\{y_n\}_{n\in N}$ sînt șiruri Cauchy, atunci și șirurile $\{x_n+y_n\}_{n\in N}$ și $\{\alpha x_n\}_{n\in N}$ sînt șiruri Cauchy. Într-adevăr, aceasta rezultă din relațiile

$$\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)\|\leqslant\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\| \tag{2.3}$$

$$\|\alpha x_n-\alpha x_m\|=|\alpha|\|x_n-x_m\|. \tag{2.4}$$

Dacă $\bar{x}=\{x_n\}_{n\in N}$ și $\bar{y}=\{y_n\}_{n\in N}$, vom pune

$$\bar{x}+\bar{y}=\{x_n+y_n\}_{n\in N}\quad \alpha\bar{x}=\{\alpha x_n\}_{n\in N}.$$

și vom defini $\tilde{x}+\tilde{y}=\tilde{z}$ dacă $\bar{x}+\bar{y}\sim\bar{z}$; $\alpha\tilde{x}=\tilde{v}$ dacă $\alpha\bar{x}\sim\bar{v}$.

Mulțimea $\tilde{\mathfrak{X}}$ devine un spațiu liniar.

Vom defini în $\tilde{\mathfrak{X}}$ următoarea normă

$$\|\tilde{x}\|=\lim_n \|x_n\|. \tag{2.5}$$

Existența limitei se datorește inegalității

$$|\|x_n\|-\|x_m\||\leqslant\|x_n-x_m\|.$$

Limita nu depinde de elementul $\bar{x}=\{x_n\}_{n\in N}$ care aparține clasei $\tilde{x}$, deoarece dacă

$$\lim_n \|x_n-x'_n\|=0$$

atunci

$$\lim_n \|x'_n\|=\lim_n \|x_n\|.$$

Faptul că formula (2.5) definește o normă se verifică imediat.

Deci $\tilde{\mathfrak{X}}$ a devenit un spațiu liniar normat

Să notăm

$$\tilde{\mathfrak{X}}_0=\{\tilde{x}|\bar{x}=\{x, x, x, \ldots\};\ x\in\mathfrak{X}\}.$$

Dacă $\bar{x}=\{x_n\}_{n\in N}$ și $\lim_n x_n=x$, atunci $\tilde{x}\in\tilde{\mathfrak{X}}_0$.

Aplicația $x\to\tilde{x}$ a lui $\mathfrak{X}$ pe $\tilde{\mathfrak{X}}_0$ este un izomorfism, după cum se verifică ușor.

Identificînd $\mathfrak{X}$ cu $\tilde{\mathfrak{X}}_0$ se poate vorbi de distanța dintre un element $x\in\mathfrak{X}$ și un element $\tilde{y}\in\tilde{\mathfrak{X}}$

$$\|x-\tilde{y}\|=\lim_n \|x-y_n\|$$

Scanned with OKEN Scanner

(unde $\bar{y}=\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$). Dacă $\tilde{x}\in\tilde{\mathfrak{X}}$ iar $x=\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există n_ε așa ca

$$||x_m-x_n||<\varepsilon \text{ (dacă } n, m>n_\varepsilon).$$

Trecînd la limită în raport cu m, obținem

$$||\tilde{x}-x_n||\leqslant\varepsilon \quad (n>n_\varepsilon).$$

Deci

$$\tilde{x}=\lim_n x_n.$$

Să arătăm acum că spațiul $\tilde{\mathfrak{X}}$ este complet.

Fie $\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir Cauchy de elemente ale lui $\tilde{\mathfrak{X}}$. După observația precedentă, pentru orice $n\in\mathbf{N}$ există $x_n\in\mathfrak{X}$ așa ca

$$||\tilde{x}_n-x_n||<\frac{1}{n}.$$

Din

$$||x_m-x_n||\leqslant||x_m-\tilde{x}_m||+||\tilde{x}_m-\tilde{x}_n||+||\tilde{x}_n-x_n||$$

rezultă că $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy de elemente din $\mathfrak{X}$. Notînd $\bar{x}=\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ rezultă

$$\lim_n||\tilde{x}-x_n||=0.$$

Din

$$||\tilde{x}_n-\tilde{x}||\leqslant||\tilde{x}_n-x_n||+||x_n-\tilde{x}||$$

rezultă

$$\lim_n||\tilde{x}_n-\tilde{x}||=0$$

adică $\tilde{x}=\lim_n\tilde{x}_n$.

2.3. FAMILII SUMABILE DE ELEMENTE ALE UNUI SPAȚIU BANACH

Vom considera un spațiu Banach $\mathfrak{X}$. Vom nota cu J o mulțime oarecare de indici și cu $\mathscr{F}(J)$ mulțimea tuturor părților finite ale lui J.

Definiția 2.3.1. *O familie $\{x_j\}_{j\in J}$ de elemente ale spațiului $\mathfrak{X}$ se zice că este sumabilă și că are suma x dacă pentru orice număr $\varepsilon>0$ există $J_\varepsilon\in\mathscr{F}(J)$ așa ca*

$$\Big\|\sum_{j\in H}x_j-x\Big\|<\varepsilon$$

oricare ar fi $H\in\mathscr{F}(J)$ așa ca $H\supset J_\varepsilon$.

Elementul x, suma familiei $\{x_j\}_{j\in J}$ se va nota în modul următor[1]

$$x=\sum_{j\in J} x_j.$$

Se observă că o familie finită $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este sumabilă și are ca sumă suma obișnuită

$$x=\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Teorema 2.3.1. *Pentru ca o familie infinită $\{x_j\}_{j\in J}$ să fie sumabilă, este necesar și suficient ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe $J_\varepsilon\in\mathcal{F}(J)$ astfel încît*

$$\|\sum_{j\in H} x_j\|<\varepsilon$$

oricare ar fi $H\in\mathcal{F}(J)$ cu $H\cap J_\varepsilon=\emptyset$.

Demonstrație. Fie $\{x_j\}_{j\in J}$ sumabilă și x suma sa. Fie $J_\varepsilon\in\mathcal{F}(J)$ așa ca

$$\|\sum_{j\in J'} x_j-x\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

dacă $J_\varepsilon\subset J'\in\mathcal{F}(J)$. Deci pentru $H\in\mathcal{F}(J)$ cu $H\cap J_\varepsilon=\emptyset$ avem

$$\|\sum_{j\in H} x_j\|=\|\sum_{j\in H\cup J_\varepsilon} x_j-\sum_{j\in J_\varepsilon} x_j\|\leqslant\|\sum_{j\in H\cup J_\varepsilon} x_j-x\|+\|x-\sum_{j\in J_\varepsilon} x_j\|<\varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem îndeplinită condiția din enunțul teoremei. Pentru orice $H\in\mathcal{F}(J)$ să notăm

$$s_H=\sum_{j\in H} x_j.$$

Fie $\varepsilon>0$ arbitrar și $J_\varepsilon\in\mathcal{F}(J)$ ca în enunțul teoremei. Dacă H', $H''\in\mathcal{F}(J)$ și $H'\supset H''\supset J_\varepsilon$ atunci

$$\|s_{H'}-s_{H''}\|<\varepsilon.$$

Dacă pentru orice $n\in\mathbf{N}$ punem

$$H_n=\bigcup_{k=1}^{n} J_{2^{-k}}$$

atunci $H_{n+1}\supset H_n\supset J_{2^{-n}}$ și deci

$$\|s_{H_{n+1}}-s_{H_n}\|<\frac{1}{2^n}.$$

Rezultă

$$\|s_{H_{n+m}}-s_{H_n}\|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\|s_{H_{n+k}}-s_{H_{n+k-1}}\|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^{n+k-1}}$$

deci $\{s_{H_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy. Fie $x=\lim_n s_{H_n}$. Pentru orice $H\in\mathcal{F}(J)$

[1] Se utilizează și notația: $x=\sum_{j\in J} x_j$.

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$\|s_H - x\| \leqslant \|s_H - s_{H_n}\| + \|s_{H_n} - x\|. \tag{2.6}$$

Dacă $H \supset H_n$, atunci

$$\|s_H - s_{H_n}\| < \frac{1}{2^n}$$

deoarece $H_n \supset J_{2^{-n}}$. Pe de altă parte, pentru orice $\varepsilon > 0$ există n'_ε așa ca

$$\|s_{H_n} - x\| < \varepsilon/2$$

dacă $n \geqslant n'_\varepsilon$. Fie $n_\varepsilon \geqslant n'_\varepsilon$ așa ca $2^{-n_\varepsilon} < \varepsilon\, 2^{-1}$. Atunci cu (2.6) rezultă

$$\|\sum_{j\in H} x_j - x\| < \varepsilon$$

dacă $H \supset H_{n_\varepsilon}$. Deoarece ε a fost arbitrar, rezultă că familia $\{x_j\}_{j\in J}$ este sumabilă și $x = \sum\limits_{j\in J} x_j$.

Observație. (1) Orice subfamilie a unei familii sumabile este sumabilă. Rezultă imediat din teorema 2.3.1.

(2) Dacă $\{x_j\}_{j\in J}$ este o familie sumabilă, atunci mulțimea elementelor $x_j \neq 0$ este cel mult numărabilă.

Într-adevăr, în baza teoremei 2.3.1. pentru orice $n \in \mathbf{N}$ mulțimea $\{j \in J \,|\, \|x_j\| \geqslant 1/n\}$ este finită.

(3) Dacă $\{x_j\}_{j\in J}$ și $\{y_j\}_{j\in J}$ sînt familii sumabile, atunci familia $\{\alpha x_j + \beta y_j\}_{j\in J}$ este sumabilă ($\forall \alpha, \beta \in \Gamma$) și are loc egalitatea

$$\alpha \sum_{j\in J} x_j + \beta \sum_{j\in J} y_j = \sum_{j\in J} (\alpha x_j + \beta y_j).$$

Verificarea este imediată.

Teorema 2.3.2. *Fie $\{x_j\}_{j\in J}$ o familie sumabilă, $\{I_h\}_{h\in H}$ o partiție a lui J și*

$$y_h = \sum_{j\in I_h} x_j.$$

Atunci familia $\{y_h\}_{h\in H}$ este sumabilă și

$$\sum_{h\in H} y_h = \sum_{j\in J} x_j.$$

Demonstrație. Să notăm

$$x = \sum_{j\in J} x_j.$$

Fie $\varepsilon > 0$ și $J_\varepsilon \in \mathscr{F}(J)$ așa ca

$$\|\sum_{j\in J'} x_j - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (J_\varepsilon \subset J' \in \mathscr{F}(J)).$$

Să notăm

$$H_\varepsilon = \{h \in H \,|\, I_h \cap J_\varepsilon \neq \varnothing\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea H_ε este finită (căci J_ε este finită iar mulțimile I_h sînt disjuncte, două cîte două).

Fie $H' \in \mathscr{F}(H)$ așa ca $H' \supset H_\varepsilon$. Fie n numărul elementelor lui H'. Pentru orice $h \in H'$ să considerăm o mulțime $J_\varepsilon^h \in \mathscr{F}(I_h)$ așa că

$$I_h \cap J_\varepsilon \subset J_\varepsilon^h,$$

și astfel încît

$$\| \sum_{j \in J_\varepsilon^h} x_j - y_h \| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Notînd

$$J'_\varepsilon = \bigcup_{h \in H'} J_\varepsilon^h$$

avem

$$\| \sum_{h \in H'} y_h - x \| = \| \sum_{h \in H'} y_h - \sum_{h \in H'} \sum_{j \in J_\varepsilon^h} x_j \| + \| \sum_{h \in H'} \sum_{j \in J_\varepsilon^h} x_j - x \| \leqslant \sum_{h \in H'} \| y_h -$$

$$- \sum_{j \in J_\varepsilon^h} x_j \| + \| \sum_{j \in J'_\varepsilon} x_j - x \| < n \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de unde rezultă că familia $\{y_h\}_{h \in H}$ este sumabilă și are suma x.

Definiția 2.3.2. *O familie $\{x_j\}_{j \in J}$ de elemente ale spațiului $\mathfrak{X}$ se zice absolut sumabilă, dacă familia $\{\|x_j\|\}_{j \in J}$ este sumabilă.*

O familie absolut sumabilă (de elemente ale spațiului Banach $\mathfrak{X}$) este o familie sumabilă.

Într-adevăr, pentru orice $H \in \mathscr{F}(J)$ avem

$$\| \sum_{j \in H} x_j \| \leqslant \sum_{j \in H} \| x_j \|$$

și afirmația rezultă cu teorema 2.3.1.

Observație. Dacă $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este o familie sumabilă, atunci seria formată cu termenii șirului este convergentă și

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n.$$

Reciproca nu este în general adevărată.

Se zice că un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ definește o *serie necondiționat convergentă* dacă pentru orice permutare p a mulțimii $\mathbf{N}$ seria definită de șirul $\{x_{p(n)}\}_{n \in \mathbf{N}}$ este convergentă.

Se poate arăta că, dacă șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ definește o serie necondiționat convergentă, atunci familia $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este sumabilă și

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{p(n)}$$

oricare ar fi permutarea p.

Scanned with OKEN Scanner

2.4. SPAȚII BANACH UNIFORM CONVEXE

Definiția 2.4.1. *Se numește spațiu Banach uniform convex orice spațiu Banach* $\mathfrak{X}$ *care are următoarea proprietate: pentru orice număr* $\varepsilon\in(0,2)$ *există un număr* $\eta(\varepsilon)\in(0,1)$ *astfel ca din condițiile* $\|x\|=\|y\|=1$ *și* $\|x-y\|>\varepsilon$ *să rezulte*

$$\frac{1}{2}\|x+y\|<1-\eta(\varepsilon).$$

Observație. Un spațiu Banach $\mathfrak{X}$ este uniform convex, dacă și numai dacă din $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ și $\lim_n \|x_n+y_n\|=2$ rezultă $\lim_n \|x_n-y_n\|=0$.

Lăsăm verificarea ca exercițiu.

Lema 2.4.1. *Dacă* $\mathfrak{X}$ *este un spațiu Banach uniform convex și dacă* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *este un șir de elemente așa ca* $\lim_{n,} \|x_n\|=1$ *și* $\lim_{n,m} \|x_n+x_m\|=2$, *atunci șirul* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *este convergent.*

Demonstrație. Vom demonstra că $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy. Să presupunem mai întîi că $\|x_n\|=1$, $\bigvee n\in\mathbf{N}$. Pentru orice număr $\alpha>0$, există $n_\alpha\in\mathbf{N}$ așa ca

$$2-\|x_n+x_m\|<\alpha \quad (n, m>n_\alpha). \tag{2.7}$$

Fie $\varepsilon\in(0,2)$ oarecare și $\eta(\varepsilon)$ ca în definiția 2.4.1. Luînd $\alpha=2\eta(\varepsilon)$ și notînd $m_\varepsilon=n_{2\eta(\varepsilon)}$ cu (2.7) avem

$$\|x_n+x_m\|>2(1-\eta(\varepsilon)) \quad (n, m>m_\varepsilon).$$

Cu definiția 2.4.1 rezultă atunci

$$\|x_n-x_m\|\leqslant\varepsilon, \quad (n, m>m_\varepsilon)$$

deci $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy.

Dacă condiția $\|x_n\|=1$, $\bigvee n\in\mathbf{N}$, nu este îndeplinită, atunci (presupunînd $x_n\neq 0$, $\bigvee n\in\mathbf{N}$) să notăm

$$x_n'=\|x_n\|^{-1}x_n, \quad (n\in\mathbf{N}).$$

Avem

$$\lim_{n,m}\|x_n'+x_m'\|=2. \tag{2.8}$$

Într-adevăr, avem

$$\|x_n'+x_m'\| = \frac{1}{\|x_n\|\cdot\|x_m\|}\|\,\|x_m\|x_n+\|x_n\|x_m\|. \tag{2.9}$$

Pe de altă parte

$$\|x_m\|x_n+\|x_n\|x_m=(x_n+x_m)-(1-\|x_m\|)x_n-(1-\|x_n\|)x_m$$

și deci notînd

$$z_{mn}=(1-\|x_m\|)x_n+(1-\|x_n\|)x_m$$

avem

$$\big\|\,\|x_m\|x_n+\|x_n\|x_m\|=\|x_n+x_m-z_{mn}\big\|. \tag{2.10}$$

Deoarece

$$\|x_n+x_m\|-\|z_{mn}\|\leqslant\|x_n+x_m-z_{mn}\|\leqslant\|x_n+x_m\|+\|z_{mn}\|$$

iar $\lim_{n,m}\|z_{mn}\|=0$, cu (2.9) și (2.10) rezultă (2.8).

Scanned with OKEN Scanner

Cum $||x_n'||=1$, cu cele arătate la începutul demonstrației lemei, rezultă că $\{x_n'\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy. Din

$$||x_n||x_n'-||x_m||x_m'=x_n'-x_m'+(||x_n||-1)x_n'+(1-||x_m||)x_m'$$

rezultă

$$||x_n-x_m||=||||x_n||x_n'-||x_m||x_m'||\leqslant||x_n'-x_m'||+\big|\,||x_n||-1|+|1-||x_m||\,\big|.$$

deci $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy.

Teorema 2.4.1. *Dacă E este o submulțime convexă și închisă a unui spațiu Banach uniform convex, atunci există un element $a\in E$ și numai unul astfel ca $||a||=\inf\{||x|| \mid x\in E\}$.*

Demonstrație. Putem evident presupune că $\mathbf{0}\notin E$ (cazul cînd $\mathbf{0}\in E$ fiind banal). Dacă notăm

$$\delta=\inf\{||x|| \mid x\in E\}$$

atunci $\delta>0$ căci E este închisă și $\mathbf{0}\notin E$.

Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de elemente din E așa ca $\delta=\lim\limits_n||x_n||$. Mulțimea E fiind convexă, avem

$$2^{-1}(x_n+x_m)\in E$$

și deci

$$2\delta\leqslant||x_n+x_m||\leqslant||x_n||+||x_m||. \tag{2.11}$$

Notînd $x_n'=\delta^{-1}x_n$ avem $\lim\limits_n||x_n'||=1$ și cu (2.11)

$$\lim_{m,\,n}||x_n'+x_m'||=2.$$

Cu lema 2.4.1 șirul $\{x_n'\}_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent, deci și șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent. Punînd $a=\lim\limits_n x_n$, avem $a\in E$, căci E este închisă. Evident $||a||=\delta$.

Dacă ar mai exista un element $b\in E$ așa ca $||b||=\delta$ atunci

$$||\delta^{-1}a||=||\delta^{-1}b||=1.$$

Dacă $a\neq b$ și

$$0<\varepsilon<\delta^{-1}||a-b||$$

atunci există $\eta(\varepsilon)\in(0,1)$ așa ca

$$||\delta^{-1}a+\delta^{-1}b||<2(1-\eta(\varepsilon)) \tag{2.12}$$

căci

$$||\delta^{-1}a-\delta^{-1}b||>\varepsilon.$$

Pe de altă parte, din $2^{-1}a+2^{-1}b\in E$ rezultă

$$||2^{-1}a+2^{-1}b||\geqslant\delta.$$

ceea ce este în contradicție cu (2.12).

Teorema este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. EXEMPLE DE SPAȚII BANACH

În acest paragraf vom prezenta diverse spații Banach „concrete" adică spații ale căror elemente sînt funcții (sau clase de funcții) numerice definite pe o anumită mulțime.

Vom considera mai întîi cazul particular al spațiilor de șiruri.

3.1. SPAȚII DE ȘIRURI NUMERICE

Să considerăm un număr real $p \geqslant 1$ și să notăm cu (l_Γ^p) mulțimea tuturor șirurilor $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente ale lui Γ pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$ este convergentă. Această mulțime se organizează ca spațiu liniar normat considerîndu-se operațiile obișnuite cu șiruri și norma[1]

$$||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

Faptul că formula (3.1) definește o normă se stabilește imediat, folosind inegalitatea lui Minkowski (sect. 1.3) dacă $p>1$.

Spațiul (l_Γ^p) este complet.

Într-adevăr, fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir Cauchy de elemente din acest spațiu și $x_n=\{\xi_{nj}\}_{j\in\mathbf{N}}$. Pentru orice $\varepsilon>0$ există $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel ca

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon, \quad (n, m > k_\varepsilon)$$

deci

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{nj} - \xi_{mj}|^p < \varepsilon^p \quad (n, m > k_\varepsilon). \tag{3.2}$$

În particular

$$|\xi_{nj} - \xi_{mj}| < \varepsilon \quad (n, m > k_\varepsilon\,;\ \forall j \in \mathbf{N})$$

deci există $\xi_j = \lim_n \xi_{nj}$, $\forall j \in \mathbf{N}$. Cu (3,2) deducem

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{nj} - \xi_j|^p \leqslant \varepsilon^p, \quad (n > k_\varepsilon) \tag{3.3}$$

și deci punînd $x=\{\xi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ avem $x_n - x \in (l_\Gamma^p)$, $(n>k_\varepsilon)$ de unde $x \in (l_\Gamma^p)$. Deoarece (3.3) se poate scrie

$$||x_n - x|| \leqslant \varepsilon, \quad (n > k_\varepsilon)$$

rezultă $x = \lim_n x_n$. Deci (l_Γ^p) este un spațiu Banach.

Complemente și exerciții. (1) Să se arate că spațiul (l_Γ^p) este separabil.

(2) Fie (m_Γ) mulțimea tuturor șirurilor mărginite de elemente din Γ, cu operațiile liniare naturale și norma

$$||x|| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |\xi_n|, \quad (x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}).$$

Să se arate că (m_Γ) este un spațiu Banach.

---

[1] În cazul $p=1$, acest spațiu s-a notat (l_Γ).

Scanned with OKEN Scanner

(3) Fie (c_Γ) mulțimea tuturor șirurilor convergente de elemente din Γ, cu operațiile liniare și norma ca în (m_Γ). Să se arate că (c_Γ) este un spațiu Banach.

(4) Fie (c_Γ°) mulțimea tuturor șirurilor de elemente din Γ, care converg către zero. Organizat ca și (c_Γ) să se arate că (c_Γ°) este un spațiu Banach.

3.2. SPAȚII DE FUNCȚII NUMERICE MĂRGINITE

(1) Fie T o mulțime (nevidă oarecare).

Vom nota cu $\mathbf{B}_\Gamma(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor mărginite $x: T \to \Gamma$. Cu operațiile obișnuite cu funcțiile și cu norma

$$\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)| \tag{3.4}$$

mulțimea $\mathbf{B}_\Gamma(T)$ este un spațiu Banach. Verificarea se face cu ușurință.

Fie $\mathscr{T}$ o algebră de submulțimi ale lui T, adică o mulțime de submulțimi ale lui T cu proprietățile: $\varnothing \in \mathscr{T}$; $A \in \mathscr{T} \Rightarrow \complement A \in \mathscr{T}$; $A_i \in \mathscr{T}$, $(i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow$ $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{T}$.

O funcție $s: T \to \Gamma$ se numește *$\mathscr{T}$-simplă* dacă se poate reprezenta sub forma

$$s(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \gamma_{A_j}(t), \quad (t \in T) \tag{3.5}$$

unde $\alpha_j \in \Gamma$, $A_j \in \mathscr{T}$ iar γ_A este funcție caracteristică a lui A. Mulțimea $\mathscr{S}$ a tuturor funcțiilor $\mathscr{T}$-simple este evident o submulțime a lui $\mathbf{B}_\Gamma(T)$. Vom nota cu $\mathbf{B}_\Gamma(T, \mathscr{T})$, închiderea lui $\mathscr{S}$ în spațiul $\mathbf{B}_\Gamma(T)$. În particular $\mathbf{B}_\Gamma(T, \mathscr{T})$ este un spațiu Banach cu norma (3.4).

Propoziția 3.2.1. *Pentru ca o submulțime mărginită $E \subset \mathbf{B}_\Gamma(T, \mathscr{T})$ să fie relativ compactă, este necesar și suficient ca pentru orice număr $\varepsilon > 0$ să existe o $\mathscr{T}$-partiție finită*[1] $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *a lui T și punctele $t_j \in A_j$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ astfel ca*

$$\sup_{t \in A_j} |x(t) - x(t_j)| < \varepsilon, \quad (x \in E;\ j = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.6}$$

Demonstrație. Să presupunem că E este relativ compactă. Pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există atunci elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel ca

$$\min_{i=1}^{n} \|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{3}, \ (\forall\, x \in E). \tag{3.7}$$

Pe de altă parte, dacă $x_0 \in \mathbf{B}_\Gamma(T, \mathscr{T})$ atunci pentru orice $\eta > 0$ există o $\mathscr{T}$-partiție $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a lui T astfel ca

$$\Big\| x_0 - \sum_{j=1}^{m} x_0(t_j) \gamma_{A_j} \Big\| < \eta \tag{3.8}$$

---

[1] O $\mathscr{S}$-partiție finită a lui T este un sistem finit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ de mulțimi disjuncte cu $A_j \in \mathscr{S}$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$ și $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = T$.

Scanned with OKEN Scanner

oricare ar fi $t_j \in A_j$, $(j=1, 2, \ldots, m)$. Într-adevăr, mulțimea $\mathscr{S}$ a funcțiilor $\mathscr{T}$-simple fiind densă în $\mathbf{B}_\Gamma(T, \mathscr{T})$, pentru orice $\eta>0$ există $s\in\mathscr{S}$ așa ca $\|x_0-s\|<\eta/2$. Dacă s este de forma (3.5) se poate presupune că mulțimile A_j formează o partiție a lui T și atunci este evident că

$$\|s-\sum_{j=1}^{m} x_0(t_j)\gamma_{A_j}\|<\eta/2$$

dacă $t_j\in A_j$.

Inegalitatea (3.8) rezultă imediat.

Să considerăm acum elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de mai sus. Există o partiție $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a lui T astfel ca

$$\|x_i-\sum_{j=1}^{m} x_i(t_j)\gamma_{A_j}\|<\varepsilon/3,\ (i=1, 2, \ldots, n)$$

oricare ar fi $t_j\in A_j$, $(j=1, 2, \ldots, m)$.
Rezultă

$$\|x-\sum_{j=1}^{m} x(t_j)\gamma_{A_j}\|\leqslant\|x-x_i\|+\|x_i-\sum_{j=1}^{m} x_i(t_j)\gamma_{A_j}\|+$$

$$+\|\sum_{j=1}^{m}[x_i(t_j)-x(t_j)]\gamma_{A_j}\|\leqslant 2\|x-x_i\|+\frac{\varepsilon}{3}$$

și cu (3.7) deducem

$$\|x-\sum_{j=1}^{m} x(t_j)\gamma_{A_j}\|<\varepsilon, \qquad (\forall x\in E) \tag{3.9}$$

adică are loc (3.6).

Reciproc, să presupunem îndeplinită condiția din enunțul propoziției. Are loc deci (3.9).

Mulțimea E fiind mărginită, pentru orice $\mathscr{T}$-partiție finită $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a lui T și $t_j\in A_j$, $(j=1, \ldots, m)$ mulțimea

$$E_0=\left\{s\in\mathscr{S}\,|\,s=\sum_{j=1}^{m} x(t_j)\gamma_{A_j};\ x\in E\right\}$$

este de asemenea mărginită. De aici deducem că E_0 este relativ compactă. (A se vedea observațiile din 1.2.) Există deci elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel ca

$$\min_{i=1}^{n}\|s-x_i\|<\varepsilon,\ (\forall s\in E_0).$$

De aici și din (3.9) rezultă

$$\min_{i=1}^{n}\|x-x_i\|<2\varepsilon,\ (\forall x\in E)$$

deci E este relativ compactă.

Propoziția este demonstrată.

(2) Vom presupune acum că T este un spațiu topologic compact și vom nota cu $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor continui care aplică T în Γ. Cu

Scanned with OKEN Scanner

operaţiile obişnuite cu funcţiile şi cu norma dată de (3.4), mulţimea $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ este un spaţiu Banach. Dacă notăm cu $\mathcal{T}$ mulţimea tuturor submulţimilor lui T, atunci $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ este un subspaţiu liniar închis al lui $\mathbf{B}_\Gamma(T, \mathcal{T})=\mathbf{B}_\Gamma(T)$.

În particular, o submulţime mărginită $E\subset \mathbf{C}_\Gamma(T)$ este relativ compactă, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există $A_j\subset T$, $(j=1, 2, \ldots, m)$ cu $\bigcup_{j=1}^{m} A_j=T$ şi $t_j\in A_j$; $(j=1, 2, \ldots, m)$ astfel ca (3.6) să aibă loc.

Propoziţia 3.2.2. (*Arzela-Ascoli*). *O submulţime E a spaţiului $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ este relativ compactă, dacă şi numai dacă este mărginită şi egal-continuă*[1].

Demonstraţie. Fie E relativ compactă. Pentru orice număr $\varepsilon>0$ există elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aşa ca (3.7) să aibă loc. Fie $t\in T$ şi $W=W(t)$ o vecinătate a lui t aşa ca

$$|x_j(t)-x_j(t')|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad (t'\in W; j=1, 2, \ldots, n).$$

Din

$$|x(t)-x(t')|\leqslant |x(t)-x_j(t)|+|x_j(t)-x_j(t')|+|x_j(t')-x(t')|$$

rezultă atunci

$$|x(t)-x(t')|<\varepsilon, \quad (t'\in W; \ \forall x\in E)$$

deci E este egal continuă.

Reciproc, fie E mărginită şi egal continuă. Fie $\varepsilon>0$, fie $t_1, t_2, \ldots, t_m$ puncte din T, iar pentru fiecare t_i fie W_i o vecinătate a lui t_i astfel ca:

$$\bigcup_{i=1}^{m} W_i=T$$

iar

$$|x(t)-x(t_i)|<\varepsilon, \quad (\forall t\in W_i; \ \forall x\in E).$$

Cu o observaţie precedentă, E este relativ compactă.

(3) Fie acum T un segment pe dreapta reală şi p un număr natural. Vom nota cu $\mathbf{C}^p(T)$ mulţimea tuturor funcţiilor reale definite pe T, care admit derivate continue pînă la ordinul p inclusiv. Vom considera $\mathbf{C}^p(T)$ ca spaţiu liniar normat, considerînd operaţiile obişnuite cu funcţiile şi norma

$$||x||=\sum_{k=0}^{p} \max_{t\in T} |x^{(k)}(t)|$$

Convergenţa în normă a unui şir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ înseamnă $\lim_n x_n^{(k)}(t)=x^{(k)}(t)$ uniform (pentru $k=0, 1, 2, \ldots, p$).

Să arătăm că spaţiul $\mathbf{C}^p(T)$ este complet.

Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un şir Cauchy. Din

$$|x_m^{(k)}(t)-x_n^{(k)}(t)|\leqslant ||x_m-x_n||, \quad (k=0, 1, 2, \ldots, p)$$

[1] Amintim că E este egal continuă, dacă $\forall t\in T$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists W=W(t)$ vecinătate a lui t aşa ca $|x(t)-x(t')|<\varepsilon$, $\forall t'\in W$, $\forall x\in E$.

rezultă că pentru fiecare k, șirul de funcții $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniform către o funcție continuă y_k. Deducem[1]:

$$y_k(t)=y_0^{(k)}(t),\quad (k=1, 2, \ldots, p)$$

deci $y_0\in \mathbf{C}^p(T)$ și $y_0=\lim_n x_n$ în spațiul $\mathbf{C}^p(T)$.

Deci $\mathbf{C}^p(T)$ este un spațiu Banach.

Complemente și exerciții. (1) Să se arate că mulțimea tuturor funcțiilor mărginite și continue, definite pe un spațiu topologic T, cu valori în Γ, organizat ca și $\mathbf{B}_\Gamma(T)$ este un spațiu Banach.

(2) Fie $T=[0, 1]$ și să notăm cu $V(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor reale, cu variația mărginită, definite pe T. Cu operațiile obișnuite cu funcțiile și cu norma

$$\|x\|=|x(0)|+\operatorname{var}_{t\in T} x(t)$$

mulțimea $V(T)$ este un spațiu Banach.

(3) Să se arate că spațiul $\mathbf{C}_\mathbf{R}([0, 1])$, cu norma obișnuită este un spațiu separabil.

3.3. SPAȚII DE CLASE DE FUNCȚII p-INTEGRABILE

Fie $T=[a, b]$ un segment pe dreapta reală.

În secțiunea 1.1 am considerat ca exemplu de spațiu liniar normat, spațiul $\mathbf{L}_\Gamma(T)$ (care se mai notează și $\mathbf{L}_\Gamma^1(T)$).

Fie acum p un număr real mai mare ca unu. *O funcție $x: T\to\Gamma$, măsurabilă (L) se zice p-integrabilă, dacă funcția $|x|^p$ (dată de formula: $|x|^p(t)=|x(t)|^p$, $\forall t\in T$), este integrabilă (Lebesgue).*

Din inegalitatea:

$$|x(t)+y(t)|^p\leqslant 2^p(|x(t)|^p+|y(t)|^p)$$

rezultă că suma a două funcții p-integrabile este o funcție p-integrabilă. Se observă, de asemenea, imediat că dacă x este o funcție p-integrabilă atunci și λx este o funcție p-integrabilă, oricare ar fi $\lambda\in\Gamma$.

Dacă x este p-integrabilă, iar y este q-integrabilă cu

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

atunci are loc inegalitatea

$$\int_T |x(t)y(t)|\,dt\leqslant\Big(\int_T |x(t)|^p dt\Big)^{1/p}\Big(\int_T |y(t)|^q dt\Big)^{1/q}$$

numită *inegalitatea lui Hölder.*

Ea se demonstrează ca și în cazul sumelor finite (lema 1.3.2), plecînd de la inegalitatea

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q},\quad (\alpha, \beta\geqslant 0),$$

[1] Se știe că dacă $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir de funcții reale pe un segment T, care are derivate continue (de primul ordin) și dacă $f_n(t)\to f(t)$ uniform, iar $f_n'(t)\to g(t)$ uniform atunci $g(t)=f'(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

punînd

$$\alpha=\frac{|x(t)|}{\left(\int_T |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}},\qquad \beta=\frac{|y(t)|}{\left(\int_T |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}}.$$

Folosind inegalitatea lui Hölder, putem stabili *inegalitatea lui Minkowski*

$$\left(\int_T |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_T |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int_T |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Într-adevăr, odată cu funcţiile x şi y, funcţia $x+y$ este şi ea p-integrabilă deci funcţia $|x+y|^{(p-1)q}$ este integrabilă. Aplicînd inegalitatea lui Hölder perechii $|x+y|^{p-1}$ şi x, precum şi perechii $|x+y|^{p-1}$ şi y, obţinem

$$\int_T |x(t)+y(t)|^p\,dt\leqslant\int_T |x(t)+y(t)|^{p-1}|x(t)|\,dt+$$

$$\int_T |x(t)+y(t)|^{p-1}|y(t)|\,dt\leqslant\left(\int_T |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}\left(\int_T |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\int_T |x(t)+y(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}\left(\int_T |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int_T |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/q}\left\{\left(\int_T |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int_T |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right\}.$$

Împărţind acum prin

$$\left(\int_T |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/q},$$

obţinem inegalitatea lui Minkowski.

Vom defini în mulţimea funcţiilor p-integrabile relaţia de echivalenţă: $x\sim y$ dacă $x(t)=y(t)$ a.p.t.

Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă o notăm prin $\mathbf{L}_\Gamma^p(T)$. În această mulţime introducem adunarea şi înmulţirea, cu numere ca şi în $\mathbf{L}_\Gamma(T)$, precum şi norma

$$\|x\|=\left(\int_T |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p},\quad (x\in\mathbf{L}_\Gamma^p(T))$$

(convenind să notăm tot cu x, clasa determinată de x).

Proprietăţile (i) şi (iii) din secţiunea 1.1 rezultă din proprietăţile integralei Lebesgue, iar proprietatea (ii) este dată de inegalitatea lui Minkowski.

Convergenţa în normă în spaţiul $\mathbf{L}_\Gamma^p(T)$ şi anume $\lim_n x_n=x$ se traduce prin egalitatea

$$\lim_n\int_T |x_n(t)-x(t)|^p\,dt=0.$$

Convergenţa şirului de funcţii $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ către funcţia x dată de această egalitate se numeşte de obicei *convergenţa în medie de ordinul* p. Cînd $p=2$, ea se numeşte *convergenţa în medie pătratică*.

Să arătăm că pentru orice $p\geqslant 1$ spaţiul $\mathbf{L}_\Gamma^p(T)$ este complet.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir Cauchy format cu elemente ale spațiului $\mathbf{L}_1^p(T)$. Pentru orice $n\in\mathbf{N}$, fie $h_n\in\mathbf{N}$ așa ca

$$||x_j-x_k||<\frac{1}{2^n}$$

dacă, $j, k\geqslant h_n$. Se poate evident presupune că șirul $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este crescător. Avem deci:

$$||x_{h_{n+1}}-x_{h_n}||<\frac{1}{2^n}$$

de unde rezultă că seria numerică

$$\sum_{n=1}^{\infty}||x_{h_{n+1}}-x_{h_n}||$$

este convergentă.

Pe de altă parte, dacă în inegalitatea lui Hölder înlocuim pe x prin $x_{h_{n+1}}-x_{h_n}$ și facem $y(t)\equiv 1$, obținem

$$\int_T|x_{h_{n+1}}(t)-x_{h_n}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\lambda||x_{h_{n+1}}-x_{h_n}||$$

unde $\lambda=(b-a)^{1/q}$. Rezultă că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_T|x_{h_{n+1}}(t)-x_{h_n}(t)|\mathrm{d}t$$

este convergentă și deci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_{h_{n+1}}(t)-x_{h_n}(t)|$$

converge aproape peste tot. Deoarece

$$x_{h_{n+1}}(t)=x_{h_1}(t)+\sum_{i=1}^{n}\{x_{h_{i+1}}(t)-x_{h_i}(t)\},$$

șirul $\{x_{h_n}(t)\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge aproape peste tot. Fie x o funcție egală cu $\lim\limits_n x_{h_n}(t)$ în punctele în care limita există (și este finită) și egală cu zero în celelalte puncte. Avem deci $x(t)=\lim\limits_n x_{h_n}(t)$ a.p.t. Funcția x este măsurabilă.

Fie acum $\varepsilon>0$ arbitrar și fie $k_\varepsilon\in\mathbf{N}$ așa ca

$$||x_m-x_j||<\varepsilon$$

dacă $m, j\geqslant k_\varepsilon$. Fie, de asemenea, n_0 așa ca $h_{n_0}>k_\varepsilon$. Pentru $m>k_\varepsilon$ și pentru $n>n_0$ avem deci

$$\int_T|x_m(t)-x_{h_n}(t)|^p\mathrm{d}t<\varepsilon^p.$$

De aici se deduce că $|x_m-x|^p$ este integrabilă și

$$\int_T|x_m(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon^p.$$

Funcţiile x_m şi $x_m - x$ fiind p-integrabile, funcţia x este de asemenea p-integrabilă, iar ultima inegalitate se poate scrie

$$||x_m - x|| \leqslant \varepsilon.$$

Deci $x = \lim_n x_n$ în $\mathbf{L}^p_\Gamma(T)$. Spaţiul $\mathbf{L}^p_\Gamma(T)$ este deci complet.

Exerciţii. (1). Să se arate că în spaţiul $\mathbf{L}^p_\Gamma(T)$, $(p \geqslant 1)$, mulţimea elementelor reprezentate de funcţii continue, este densă.

(2) Să se arate că spaţiul $\mathbf{L}^p_\Gamma(T)$, $(p \geqslant 1)$ este separabil.

Observaţie. Se poate demonstra că dacă $p \geqslant 2$ atunci, oricare ar fi numerele complexe α, β avem

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}(|\alpha|^p + (\beta|^p)$$

de unde rezultă că dacă $x, y \in \mathbf{L}^p_\Gamma(T)$, atunci

$$||x+y||^p + ||x-y||^p \leqslant 2^{p-1}(||x||^p + ||y||^p).$$

Dacă $1 < p < 2$ atunci se poate stabili inegalitatea

$$||x+y||^q + ||x-y||^q \leqslant 2(||x||^p + ||y||^p)^{q-1}$$

unde $x, y \in \mathbf{L}^p_\Gamma(T)$ iar $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Rezultă că pentru orice număr $p > 1$, spaţiul $\mathbf{L}^p_\Gamma(T)$ este un spaţiu Banach uniform convex.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

OPERATORI LINIARI ŞI CONTINUI

Majoritatea rezultatelor din acest capitol se referă la operatori liniari şi continui între spaţii liniare normate sau la dualul unui astfel de spaţiu. Capitolul conţine însă şi unele rezultate sau observaţii privind operatori între spaţii liniare topologice care nu sînt normate.

§ 1. OPERATORI LINIARI ŞI CONTINUI

1.1. GENERALITĂŢI PRIVIND OPERATORII LINIARI ŞI CONTINUI

Cînd considerăm operatori între două spaţii liniare topologice $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ vom subînţelege că spaţiile au scalari în acelaşi corp Γ.

Remarcăm că dacă un operator aditiv $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este continuu într-un punct x_0, atunci U este continuu în orice punct $x \in \mathfrak{X}$. Într-adevăr, fie W o vecinătate a originii în $\mathfrak{Y}$ şi V o vecinătate a originii în $\mathfrak{X}$ aşa ca

$$U(V+x_0) \subset W+U(x_0).$$

Dacă $x \in \mathfrak{X}$, atunci

$$U(V+x)=U(V+x_0)-U(x_0)+U(x) \subset W+U(x)$$

deci U este continuu în punctul x.

Fie acum $\mathfrak{X}$ şi $\mathfrak{Y}$ spaţii liniare normate.

Un operator $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *este continuu într-un punct* x_0, *dacă şi numai dacă pentru orice număr* $\varepsilon>0$ *există* $\eta>0$ *aşa ca*

$$||x-x_0||<\eta \Rightarrow ||U(x)-U(x_0)||<\varepsilon.$$

Condiţia de continuitate într-un punct x_0 se poate exprima (ca în orice spaţiu metric) cu ajutorul şirurilor[1]:

$$x_0=\lim_n x_n \Rightarrow U(x_0)=\lim_n U(x_n).$$

[1] În cazul spaţiilor topologice oarecari, continuitatea se exprimă cu ajutorul şirurilor generalizate.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este un operator liniar și continuu, atunci pentru orice serie convergentă de forma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ are loc egalitatea

$$U\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n U(x_n).$$

Verificarea este imediată.

Dacă spațiile $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ sînt reale, atunci orice operator $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ care este aditiv și continuu este omogen.

Într-adevăr, dacă operatorul U este aditiv, atunci

$$U(\rho x) = \rho U(x).$$

oricare ar fi numărul rațional ρ. Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci există un șir $\{\rho_n\}_{n \in N}$ de numere raționale așa ca $\alpha = \lim_n \rho_n$, de unde rezultă $\alpha x = \lim_n \rho_n x$, $\forall x \in \mathfrak{X}$. Dacă operatorul U este aditiv și continuu rezultă

$$U(\alpha x) = \lim_n U(\rho_n x) = \lim_n \rho_n U(x) = \alpha U(x).$$

Teorema 1.1.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații liniare normate, un operator liniar $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este continuu, dacă și numai dacă există un număr $\mu > 0$ așa ca*

$$||U(x)|| \leqslant \mu ||x||, \quad (\forall x \in \mathfrak{X}). \tag{1.1}$$

Demonstrație. Să presupunem că U este continuu. Există atunci un număr $\eta > 0$ așa ca $||U(x)|| \leqslant 1$ dacă $||x|| \leqslant \eta$. Dacă x este un element nenul oarecare al lui $\mathfrak{X}$, atunci punînd

$$x' = \eta \frac{1}{||x||} x.$$

avem $||x'|| = \eta$ și deci

$$||U(x)|| = \frac{1}{\eta} ||x|| \cdot ||U(x')|| \leqslant \frac{1}{\eta} ||x||.$$

Deci are loc (1.1) cu $\mu = \eta^{-1}$.

Reciproc, dacă are loc (1.1) atunci U este evident continuu în origine și fiind liniar este continuu în orice punct.

Observație. (1) Dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații liniare topologice oarecari, un operator $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ se numește *operator mărginit*, dacă pentru orice mulțime mărginită $A \subset \mathfrak{X}$, mulțimea $U(A)$ este mărginită. Dacă U este liniar și continuu, atunci U este un operator liniar mărginit, dar reciproca nu este în general adevărată. Din teorema 1.1.1 rezultă că dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații liniare normate, un operator liniar $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este continuu, dacă și numai dacă este mărginit. Mai general se poate demonstra[1] că dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu bornologic iar $\mathfrak{Y}$ un spațiu local convex oarecare, atunci un operator liniar $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este continuu dacă și numai dacă este mărginit.

(2) Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ spații local convexe și $\mathcal{P}$, Q două mulțimi dirijate de seminorme care definesc respectiv topologiile lui $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$. Fie $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un

[1] A se vedea de ex. R. Cristescu, Spații liniare topologice, Edit. Academiei, 1974.

operator liniar. Se poate demonstra analogul rezultatului din teorema precedentă.

Operatorul U este continuu, dacă și numai dacă pentru orice $q \in Q$, există $p \in \mathscr{P}$ și un număr $\mu > 0$, așa ca

$$q(U(x)) \leqslant \mu p(x), \quad (\forall x \in \mathfrak{X}).$$

Exerciții. (1) Să se arate că dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații liniare normate iar $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un operator liniar pentru care există o mulțime deschisă (nevidă) $E \subset \mathfrak{X}$ așa ca $U(E)$ să fie mărginită, atunci operatorul U este continuu.

(2) Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar normat finit dimensional, iar $\mathfrak{Y}$ un spațiu liniar normat oarecare, atunci orice operator liniar $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ este continuu.

Exemple. Vom da cîteva exemple de operatori liniari și continui între spații concrete. Vom considera spații liniare normate reale.

(1) Să considerăm o matrice infinită de numere reale $\{\alpha_{mn}\}_{m,\, n \in N}$ pentru care există un număr $\mu > 0$ așa ca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn}^2 \leqslant \mu, \quad (m \in \mathbf{N}).$$

În acest caz, se obține un operator liniar și continuu $U: (\mathbf{l}_{\mathbf{R}}^2) \to (\mathbf{m}_{\mathbf{R}})$ punînd

$$\mathbf{y} = U(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \eta_m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \xi_n, \quad (m \in \mathbf{N}). \tag{1.2}$$

Într-adevăr, pentru orice $\mathbf{x} = \{\xi_n\}_{n \in N} \in (\mathbf{l}_{\mathbf{R}}^2)$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \xi_n$ este convergentă, fapt care rezultă cu inegalitatea lui Cauchy[1]. Avem cu (1.2)

$$|\eta_m| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \xi_n \right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \right)^{1/2} \leqslant \mu^{1/2} ||\mathbf{x}||$$

deci $\{\eta_m\}_{m \in N} \in (\mathbf{m}_{\mathbf{R}})$ iar U (care este evident liniar) este și continuu.

Operatorul U se numește *operator matricial* (a se vedea și Cap. I, 2.1, exemplul 1).

Folosind inegalitatea lui Cauchy se arată de asemenea ușor că dacă este convergentă seria dublă[2]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn}^2$$

atunci prin (1.2) se obține un operator liniar și continuu $U: (\mathbf{l}_{\mathbf{R}}^2) \to (\mathbf{l}_{\mathbf{R}}^2)$.

Denumirea de operator matricial se păstrează și în acest caz.

---

[1] Inegalitatea lui Cauchy este următoarea:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \right)$$

unde α_j, β_j sînt numere reale oarecare. Sumele finite se pot înlocui și prin serii.

[2] În legătură cu seriile duble a se vedea M. Nicolescu, Analiza matematică, vol. I, 1957.

(2) Fie p un număr natural și să considerăm spațiul Banach $\mathbf{C}^p(T)$ al funcțiilor reale pe un segment T, care admit derivate continue pînă la ordinul p inclusiv (a se vedea Cap. III, secț. 3.2). Amintim că norma este dată de formula

$$||x|| = \sum_{k=0}^{p} \max_{t\in T} |x^{(k)}(t)|. \tag{1.3}$$

Să considerăm de asemenea spațiul $\mathbf{C}(T)$ al funcțiilor reale continue pe T, cu norma obișnuită:

$$||x|| = \max_{t\in T} |x(t)|. \tag{1.4}$$

Fie $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ funcții reale continue pe T și să definim operatorul U: $\mathbf{C}^p(T)\to\mathbf{C}(T)$ prin

$$y = U(x) \Leftrightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k(t)x^{(k)}(t).$$

Acest operator se numește *operator diferențial*. El este evident liniar. Este și continuu.

Într-adevăr dacă $y=U(x)$ și punem

$$\mu = \max_{k=0}^{p} (\max_{t\in T} |\varphi_k(t)|)$$

atunci

$$|y(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{p} |\varphi_k(t)||x^{(k)}(t)| \leqslant \mu \sum_{k=0}^{p} \max_{t\in T} |x^{(k)}(t)| = \mu||x||.$$

(3) Dacă în $\mathbf{C}^p(T)$ am lua norma dată de formula (1.4) (în locul normei (1.3)), atunci $\mathbf{C}^p(T)$ nu ar fi complet, iar operatorul diferențial nu ar fi continuu.

Într-adevăr, să considerăm cazul $p=1$, $T=[0, 1]$ și să considerăm operatorul de derivare D: $\mathbf{C}^1(T)\to(T)$ adică: $y=D(x)\Leftrightarrow y(t)=x'(t)$. Fie $x_n(t)=\sin n\pi t$.

Avem evident $||x_n||=1$. Din

$$x_n'(t) = n\pi \cos n\pi t$$

rezultă

$$||D(x_n)|| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'_n(t)| = n\pi$$

deci șirul $\{||D(x_n)||\}_{n\in N}$ nu este mărginit, deși $||x_n||=1$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Deci operatorul D nu este continuu.

În exemplul precedent am observat însă că operatorul D este continuu dacă se ia în $\mathbf{C}^1([0, 1])$ norma

$$||x|| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)|.$$

(4) Să considerăm spațiul $\mathbf{C}=\mathbf{C}_{\mathbf{R}}([0, 1])$ al funcțiilor (reale) continue pe segmentul $[0, 1]$ cu norma obișnuită. Să considerăm operatorul integral U care aplică $\mathbf{C}$ în $\mathbf{C}$

$$y = U(x) \Leftrightarrow y(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)x(t)dt$$

unde φ este o funcție (reală) continuă pe $[0, 1]\times[0, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că acest operator este liniar. Punînd

$$\mu = \max_{0 \leqslant s,t \leqslant 1} |\varphi(s, t)|$$

avem

$$||U(x)|| = ||y|| = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |y(s)| \leqslant \mu \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| = \mu ||x||$$

deci U este continuu.

1.2. SPAȚIUL OPERATORILOR LINIARI ȘI CONTINUI

Am văzut în cap. I, § 2 că dacă $\mathscr{X}$ și $\mathscr{Y}$ sînt spații liniare oarecari mulțimea $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})'$ a operatorilor liniari formează un spațiu liniar.

Vom considera acum mulțimea operatorilor liniari și continui care aplică un spațiu normat $\mathscr{X}$ într-un spațiu normat $\mathscr{Y}$. Vom nota cu $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ această mulțime.

Definiția 1.2.1. *Se numește norma unui operator liniar și continuu U și se notează cu $||U||$ numărul*

$$||U|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} ||U(x)||. \tag{1.5}$$

Existența numărului $||U||$ rezultă din (1.1), deoarece pentru $||x|| \leqslant 1$ avem $||U(x)|| \leqslant \mu$.

Folosind omogenitatea operatorului U se stabilesc ușor și formulele

$$||U|| = \sup_{||x|| = 1} ||U(x)|| \tag{1.6}$$

$$||U|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||U(x)||}{||x||}. \tag{1.7}$$

Numărul $||U||$ este cel mai mic număr μ pentru care are loc inegalitatea (1.1).

Într-adevăr, dacă are loc (1.1), atunci pentru $||x|| \leqslant 1$ rezultă $||U(x)|| \leqslant \mu$ deci $||U|| \leqslant \mu$. Pe de altă parte,

$$||U(x)|| \leqslant ||U||\,||x||. \tag{1.8}$$

Mulțimea $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ este un subspațiu liniar al lui $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})'$. Într-adevăr, dacă $U_1, U_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, atunci evident $U_1 + U_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ și $\lambda U \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

În particular $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ este un spațiu liniar.

Să arătăm că norma unui operator introdusă în definiția precedentă are cele trei proprietăți ale unei norme (proprietățile (i), (ii), (iii) din secțiunea 1.1, cap. III).

Dacă $||U|| = 0$, atunci din inegalitatea (1.8) rezultă $||U(x)|| = 0$, deci $U(x) = \mathbf{0}$, oricare ar fi $x \in \mathscr{X}$, adică U este operatorul nul: $U = O$.

A doua condiție a normei rezultă din inegalitatea

$$||(U_1 + U_2)(x)|| \leqslant (||U_1|| + ||U_2||)||x||$$

care se stabilește imediat.

Să trecem în sfîrșit la a treia condiție. Pentru $\lambda = 0$ condiția este evident îndeplinită. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci după cum se observă imediat,

Scanned with OKEN Scanner

$$||(\lambda U)(x)|| \leqslant (|\lambda|\,||U||)\,||x||$$

de unde rezultă

$$||\lambda U|| \leqslant |\lambda|\,||U||.$$

De aici rezultă și inegalitatea contrară (înlocuind U prin λU și λ prin $1/\lambda$) deci

$$||\lambda U|| = |\lambda|\,||U||.$$

Am arătat astfel că $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *este un spațiu liniar normat.*
Convergența în norma acestui spațiu

$$\lim_n ||U_n - U|| = 0$$

poartă numele de *convergență uniformă* a șirului de operatori $\{U_n\}_{n\in N}$.

Vom arăta acum că *dacă spațiul* $\mathcal{Y}$ *este complet, atunci și spațiul* $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *este complet.*

Fie $\{U_n\}_{n\in N}$ un șir Cauchy în spațiul $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există deci $k_\varepsilon \in \mathbf{N}$ așa ca

$$||U_n - U_m|| < \varepsilon, \quad (n, m > k_\varepsilon). \tag{1.9}$$

Din inegalitatea

$$||U_n(x) - U_m(x)|| \leqslant ||U_n - U_m||\;||x||$$

și din (1.9) rezultă

$$||U_n(x) - U_m(x)|| < \varepsilon||x||, \quad (n, m > k_\varepsilon). \tag{1.10}$$

Deci $\{U_n(x)\}_{n\in N}$ este un șir Cauchy în spațiul $\mathcal{Y}$, pentru fiecare element $x \in \mathcal{X}$. Spațiul $\mathcal{Y}$ fiind complet, șirul $\{U_n(x)\}_{n\in N}$ este convergent (pentru fiecare $x \in \mathcal{X}$). Să punem

$$U(x) = \lim_n U_n(x), \quad (x \in \mathcal{X}).$$

Această formulă definește un operator U: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ care este liniar, deoarece

$$U(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_n U_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_n (\alpha U_n(x_1) + \beta U_n(x_2)) = \alpha U(x_1) + \beta U(x_2).$$

Să arătăm că U este și continuu. Pentru aceasta, să trecem la limită în (1.10), în raport cu m. Obținem:

$$||U_n(x) - U(x)|| \leqslant \varepsilon||x||, \quad (n > k_\varepsilon) \tag{1.11}$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{X}$, deci $U_n - U \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $(n > k_\varepsilon)$. Dar atunci, din

$$U = U_n - (U_n - U)$$

rezultă $U \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Din (1.11) deducem de asemenea

$$||U_n - U|| \leqslant \varepsilon, \quad (n > k_\varepsilon)$$

adică $U = \lim_n U_n$ în $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Deci spațiul $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ este complet.

Observație. Să considerăm spațiile normate $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ și operatorii $U_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ și $U_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Avem:

$$||U_2U_1(x)|| = ||U_2(U_1(x))|| \leqslant ||U_2||\;||U_1(x)|| \leqslant ||U_2||\;||U_1||\;||x||$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $U_2U_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$ și

$$||U_2U_1|| \leqslant ||U_2||\,||U_1||.$$

Exemplu: Să calculăm norma operatorului integral din secțiunea 1.1, exemplul (4).

Avem

$$||U(x)|| = \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \left| \int_0^1 \varphi(s, t)x(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| \cdot \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \int_0^1 |\varphi(s, t)|\mathrm{d}t$$

de unde rezultă

$$||U|| \leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \int_0^1 |\varphi(s, t)|\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

Să stabilim inegalitatea de sens contrar.

Deoarece funcția

$$k(s) = \int_0^1 |\varphi(s, t)|\mathrm{d}t$$

este continuă, există $s_0 \in [0,1]$ așa ca

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1} \int_0^1 |\varphi(s, t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |\varphi(s_0, t)|\mathrm{d}t.$$

Să considerăm acum funcția

$$h(t) = \operatorname{sign} \varphi(s_0, t)$$

și să considerăm de asemenea, un șir $\{x_n\}_{n\in N}$ de funcții continue așa ca[1]:

(1) $|x_n(t)| \leqslant 1$;

(2) $x_n(t) = h(t)$, cu excepția unei mulțimi A_n de măsură mai mică decît $(2n\mu)^{-1}$, unde $\mu = \max_{0\leqslant s,\, t\leqslant 1} |\varphi(s, t)|$.

Dacă $t \in A_n$, atunci

$$|x_n(t) - h(t)| \leqslant 2,$$

astfel că

$$\left| \int_0^1 \varphi(s, t)h(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi(s, t)x_n(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 |\varphi(s, t)| \cdot |x_n(t) - h(t)|\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{A_n} |\varphi(s, t)| \cdot |x_n(t) - h(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2 \max_{0\leqslant s,t\leqslant 1} |\varphi(s, t)| \frac{1}{2n\mu} = \frac{1}{n},$$

de unde rezultă mai departe

$$\left| \int_0^1 \varphi(s, t)h(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_0^1 \varphi(s, t)x_n(t)\mathrm{d}t \right| + \frac{1}{n} \leqslant ||U|| + \frac{1}{n}.$$

[1] Existența acestui șir de funcții continue rezultă dintr-o teoremă a lui Luzin asupra funcțiilor măsurabile. A se vedea de ex. I. P. Natanson, Teoria funcțiilor de variabilă reală, Edit. Tehnică, 1957, p. 144.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd acum $s=s_0$ și trecînd la limită în raport cu n, obținem

$$\int_0^1 |\varphi(s_0, t)|dt \leqslant ||U||$$

sau

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1} \int_0^1 |\varphi(s, t)|dt \leqslant ||U||.$$

De aici și din (1.12) rezultă

$$||U|| = \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \int_0^1 |\varphi(s, t)|dt.$$

1.3. CONVERGENȚA PUNCTUALĂ ȘI PRINCIPIUL MĂRGINIRII UNIFORME

Dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații liniare topologice $\{U_n\}_{n\in N}$ un șir de operatori care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ iar U un operator care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$, se spune că șirul $\{U_n\}_{n\in N}$ converge punctual către U, dacă

$$U(x)=\lim_n U_n(x), \quad (\forall x\in\mathfrak{X}). \tag{1.13}$$

Să presupunem că $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații normate.

Dacă $\{U_n\}_{n\in N}$ este un șir de operatori liniari care converge punctual către un operator U, atunci U este liniar. Dacă în plus fiecare operator U_n este continuu și dacă există un număr $\mu>0$ așa ca

$$||U_n|| \leqslant \mu, \quad (\forall n\in\mathbf{N})$$

atunci din

$$||U_n(x)|| \leqslant \mu||x||$$

rezultă

$$||U(x)|| \leqslant \mu||x||,$$

deci U este continuu.

Fie acum $\{U_n\}_{n\in N}$ un șir de operatori liniari și continui care converge uniform către operatorul liniar și continuu U, adică $U=\lim_n U_n$ în spațiul $\mathfrak{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Din:

$$||U_n(x)-U(x)|| \leqslant ||U_n-U||\,||x|| \tag{1.14}$$

rezultă că are loc (1.13), adică șirul de operatori converge punctual către U. Dacă A este o submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}$, atunci $U(x)=\lim_n U_n(x)$ uniform pe mulțimea A, adică pentru orice număr $\varepsilon>0$, există $k_\varepsilon\in\mathbf{N}$ așa ca

$$||U_n(x)-U(x)|| \leqslant \varepsilon, \quad (n>k_\varepsilon\,;\ \forall x\in A). \tag{1.15}$$

Într-adevăr, dacă $||x|| \leqslant \alpha$ pentru orice $x\in A$ iar

$$||U_n-U|| < \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad (n>k_\varepsilon)$$

atunci din (1.14) rezultă (1.15).

Teorema care urmează este cunoscută sub denumirea de principiul mărginirii uniforme (sau teorema lui Banach-Steinhauss[1]).

Teorema 1.3.1. *Fie* $\mathfrak{X}$ *un spațiu Banach,* $\mathcal{Y}$ *un spațiu liniar normat iar* $\{U_j\}_{j\in J}$ *o familie de operatori liniari și continui care aplică* $\mathfrak{X}$ *în* $\mathcal{Y}$. *Dacă pentru orice element* $x\in\mathfrak{X}$, *familia* $\{U_j(x)\}_{j\in J}$ *este mărginită în spațiul* $\mathcal{Y}$, *atunci familia* $\{U_j\}_{j\in J}$ *este mărginită în spațiul* $\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$.

Demonstrație. Prin ipoteză, pentru orice element $x\in\mathfrak{X}$, familia $\{\|U_j(x)\|\}_{j\in J}$ este mărginită. Pentru orice $n\in\mathbf{N}$ să punem

$$A_n=\{x\in\mathfrak{X}\mid \|U_j(x)\|\leqslant n,\ \forall j\in J\}.$$

Este evident că

$$\mathfrak{X}=\bigcup_{n\in N} A_n.$$

Deoarece orice mulțime A_n este închisă iar spațiul $\mathfrak{X}$ este de categoria a II-a Baire (fiind un spațiu metric complet) există un număr natural m astfel ca $\operatorname{int} A_m\neq\emptyset$. Să considerăm un element $x_0\in\operatorname{int} A_m$ și fie $\lambda>0$ astfel ca $S(x_0;\ \lambda)\subset A_m$.

Dacă x este un element nenul oarecare din $\mathfrak{X}$, atunci punînd

$$x_1=x_0+\frac{\lambda}{2\|x\|}x$$

avem $x_1\in S(x_0;\ \lambda)$. Din

$$x=\frac{2\|x\|}{\lambda}(x_1-x_0)$$

și din $x_0, x_1\in A_m$ rezultă

$$\|U_j(x)\|\leqslant\frac{2\|x\|}{\lambda}(\|U_j(x_1)\|+\|U_j(x_0)\|)\leqslant\frac{4m}{\lambda}\|x\|.$$

De aici, deducem

$$\|U_j\|\leqslant\frac{4m}{\lambda},\ (\forall j\in J)$$

și teorema este demonstrată.

Corolar 1.3.1. *Fie* $\{U_n\}_{n\in N}$ *un șir de operatori liniari și continui care aplică spațiul Banach* $\mathfrak{X}$ *în spațiul liniar normat* $\mathcal{Y}$. *Dacă* $\{U_n\}_{n\in N}$ *converge punctual către un operator* U, *atunci șirul normelor* $\{\|U_n\|\}_{n\in N}$ *este mărginit, iar* U *este liniar și continuu.*

Exercițiu. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar normat, $\mathcal{Y}$ un spațiu Banach S o sferă în $\mathfrak{X}$ și $\{U_n\}_{n\in N}$ un șir de operatori liniari și continui care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathcal{Y}$. Să se arate că dacă șirul converge punctual pe o submulțime[2] $A\subset S$ densă în S și dacă șirul normelor $\{\|U_n\|\}_{n\in N}$ este mărginit, atunci șirul de operatori converge punctual pe $\mathfrak{X}$ către un operator (liniar și continuu) U.

[1] Unii autori numesc teorema lui Banach-Steinhauss doar corolarul 1.3.1.

[2] Șirul de operatori $\{U_n\}_{n\in N}$ converge punctual pe o mulțime A dacă pentru orice $x\in A$ există $\lim_n U_n(x)$.

Propoziția 1.4.1. *Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ spații liniare normate, iar U un operator liniar care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$. Pentru ca U^{-1} să existe*[1] *și să fie continuu este necesar și suficient să existe un număr $\lambda>0$ așa ca*

$$||U(x)|| \geqslant \lambda ||x||, \ (\forall x \in \mathfrak{X}). \tag{1.16}$$

În acest caz

$$||U^{-1}|| \leqslant \lambda^{-1}. \tag{1.17}$$

Demonstrație. Dacă U^{-1} există și este continuu, atunci există un număr $\alpha>0$ așa ca

$$||U^{-1}(y)|| \leqslant \alpha ||y||, \ (\forall y \in U(\mathfrak{X})). \tag{1.18}$$

Din

$$U^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=U(x)$$

și din (1.18) rezultă

$$||U(x)|| \geqslant \frac{1}{\alpha}||x||$$

deci are loc (1.16) cu $\lambda=\alpha^{-1}$.

Reciproc, dacă (1.16) are loc, atunci din $U(x)=\mathbf{0}$ rezultă $x=\mathbf{0}$ deci U este inversabil. Din (1.16) rezultă de asemenea

$$||U^{-1}(y)|| = ||x|| \leqslant \frac{1}{\lambda}||U(x)|| = \frac{1}{\lambda}||y||$$

deci U^{-1} este continuu și are loc (1.17).

Observații. (1) Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ două spații liniare normate. Pentru ca $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ să fie izomorfe ca spații liniare topologice este necesar și suficient să existe un operator liniar $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ așa ca $U(\mathfrak{X})=\mathfrak{Y}$, precum și două numere λ, $\mu>0$ așa ca

$$\lambda ||x|| \leqslant ||U(x)|| \leqslant \mu ||x||, \ (\forall x \in \mathfrak{X}).$$

Aceasta rezultă imediat cu teorema 1.1.1 și propoziția 1.4.1.

(2) Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar normat și I operatorul identitate pe $\mathfrak{X}$. Dacă U este un operator liniar și continuu care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$ iar $||U||<1$, atunci $I-U$ admite un invers continuu și

$$||(I-U)^{-1}|| \leqslant (1-||U||)^{-1}.$$

Aceasta rezultă cu propoziția 1.4.1 deoarece se verifică imediat că

$$||(I-U)(x)|| \geqslant (1-||U||)||x||.$$

În secțiunea 1.7 vom vedea că operatorul $(1-U)^{-1}$ este definit pe tot spațiul $\mathfrak{X}$.

[1] Operatorul U^{-1} va fi definit pe $U(\mathfrak{X})$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.5.1. *Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ spații liniare topologice (față de același corp Γ). Un operator U care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$ se numește operator deschis, dacă pentru orice mulțime deschisă $A \subset \mathfrak{X}$, mulțimea $U(A)$ este deschisă în $\mathfrak{Y}$.*

Lema 1.5.1. *Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ spații liniare topologice iar U un operator liniar care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$. Dacă mulțimea $U(\mathfrak{X})$ este de categoria a II-a (Baire) în $\mathfrak{Y}$, atunci pentru orice vecinătate W a originii în $\mathfrak{X}$, mulțimea $\overline{U(W)}$ este o vecinătate a originii în $\mathfrak{Y}$.*

Demonstrație. Fie W_0 o vecinătate echilibrată a originii în $\mathfrak{X}$ așa ca

$$W_0 + W_0 \subset W.$$

Mulțimea W_0 fiind echilibrată și absorbantă, pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ există $n \in \mathbf{N}$ așa ca $x \in nW_0$. Rezultă

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{n \in N} nW_0$$

de unde

$$U(\mathfrak{X}) = \bigcup_{n \in N} nU(W_0). \tag{1.19}$$

Deoarece $\overline{nU(W_0)}$ este evident homeomorfă cu $\overline{U(W_0)}$, din (1.19) rezultă că

$$\operatorname{int} \overline{U(W_0)} \neq \varnothing$$

(deoarece $U(\mathfrak{X})$ este de categoria a II-a).

Să notăm

$$A = \operatorname{int} \overline{U(W_0)}.$$

Există $x_0 \in W_0$ așa ca $y_0 = U(x_0) \in A$. Într-adevăr, dacă $y \in A$ atunci $y \in \overline{U(W_0)}$ și cum A este o vecinătate a lui y, rezultă

$$A \cap U(W_0) \neq \varnothing$$

deci există x_0 cu proprietățile menționate.

Avem

$$U(W_0) - y_0 \subset U(W) \tag{1.20}$$

căci dacă $x \in W_0$, atunci $x - x_0 \in W_0 + W_0 \subset W$. Din (1.20) rezultă

$$\overline{U(W_0)} - y_0 \subset \overline{U(W)}$$

și cum $\overline{U(W_0)}$ este o vecinătate a lui y_0, rezultă că $\overline{U(W)}$ este o vecinătate a originii.

Teorema[1] 1.5.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații Banach iar U un operator liniar și continuu care aplică $\mathfrak{X}$ pe $\mathfrak{Y}$, atunci U este un operator deschis.*

Demonstrație. Spațiul $\mathfrak{Y}$ este de categoria a II-a (Baire), fiind un spațiu metric complet. Deoarece $U(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y}$, cu lema precedentă, pentru orice

[1] Această teoremă este cunoscută sub denumirea de teorema asupra aplicației deschise (S. Banach).

vecinătate W a originii în $\mathfrak{X}$ mulțimea $\overline{U(W)}$ este o vecinătate a originii în $\mathfrak{Y}$.

Pentru orice numere $\varepsilon>0$ și $\eta>0$ să notăm

$$S_\varepsilon=\{x\in\mathfrak{X}\,|\,\|x\|\leqslant\varepsilon\}$$

$$S'_\eta=\{y\in\mathfrak{Y}\,|\,\|y\|\leqslant\eta\}.$$

Să notăm de asemenea $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$.

Fie acum $\varepsilon>0$ arbitrar și să punem

$$\varepsilon_n=\frac{\varepsilon}{2^n},\ (n\in\mathbf{N}_0).$$

Există atunci un șir de numere pozitive $\{\eta_n\}_{n\in N_0}$ convergent către zero așa ca

$$S'_{\eta_n}\subset\overline{U(S_{\varepsilon_n})},\ (n\in\mathbf{N}_0). \tag{1.21}$$

Să arătăm că

$$S'_{\eta_0}\subset U(S_{2\varepsilon}). \tag{1.22}$$

Fie deci $y\in S'_{\eta_0}$. În baza lui (1.21) în care luăm $n=0$, există $x_0\in S_{\varepsilon_0}$ așa ca

$$\|y-U(x_0)\|\leqslant\eta_1.$$

Deoarece

$$y-U(x_0)\in S'_{\eta_1}$$

tot în baza lui (1.21), în care luăm $n=1$, rezultă că există $x_1\in S_{\varepsilon_1}$ așa ca

$$\|y-U(x_0)-U(x_1)\|\leqslant\eta_2.$$

Prin inducție, rezultă că există un șir $\{x_n\}_{n\in N_0}$ cu $x_n\in S_{\varepsilon_n}$ așa ca

$$\|y-U\left(\sum_{j=0}^{n}x_j\right)\|\leqslant\eta_{n+1},\ (n\in\mathbf{N}_0). \tag{1.23}$$

Deoarece $\|x_n\|\leqslant\varepsilon_n$, există

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}x_n$$

și avem astfel $\|x\|\leqslant2\varepsilon$, adică $x\in S_{2\varepsilon}$.

Pe de altă parte, U fiind continuu, din (1.23) rezultă $=U(x)$ deci $y\in U(S_{2\varepsilon})$, adică are loc (1.22).

Am arătat deci că dacă W este o vecinătate oarecare a originii în $\mathfrak{X}$, atunci $U(W)$ este o vecinătate a originii în $\mathfrak{Y}$ (deoarece dacă $S_{2\varepsilon}\subset W$, atunci $S'_{\eta_0}\subset U(W)$.

Fie acum A o mulțime deschisă (nevidă) în $\mathfrak{X}$ și $x\in A$. Dacă W este o vecinătate a originii în $\mathfrak{X}$ așa ca

$$W+x\subset A$$

atunci

$$U(W)+U(x)\subset U(A)$$

deci $U(x)$ este interior lui $U(A)$.
Deoarece $U(x)$ a fost oarecare în $U(A)$, mulțime $U(A)$ este deschisă.
Teorema este demonstrată.

Corolar 1.5.1. *Dacă U este un operator liniar și continuu care aplică biunivoc un spațiu Banach $\mathfrak{X}$ pe un spațiu Banach $\mathfrak{Y}$ atunci U^{-1} este continuu.*

1.6. OPERATORI ÎNCHIȘI

Dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații liniare iar $U: E\to\mathfrak{Y}$ un operator definit pe o submulțime E a lui $\mathfrak{X}$, atunci mulțimea

$$G(U)=\{(x,\ U(x))\mid x\in E\} \tag{1.24}$$

(submulțime a lui $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$) se numește *graficul* operatorului U.

Definiția 1.6.1. *Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ spații liniare topologice iar $U: E\to\mathfrak{Y}$ un operator definit pe o submulțime E a lui $\mathfrak{X}$. Se zice că U este un operator închis dacă graficul $G(U)$ a lui U este o submulțime închisă a spațiului produs $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$.*

În restul secțiunii vom presupune că $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații normate.

Observații. (1) Un operator $U: E\to\mathfrak{Y}$ definit pe o submulțime E a spațiului normat $\mathfrak{X}$, cu valori în spațiul normat $\mathfrak{Y}$ este închis, dacă și numai dacă are proprietatea:
dacă $\{x_n\}_{n\in N}$ este un șir de elemente din E și dacă $x=\lim\limits_n x_n$ și $y=\lim\limits_n U(x_n)$ atunci $x\in E$ și $y=U(x)$.

(2) Dacă un operator $U: E\to\mathfrak{Y}$ este închis și inversabil, atunci U^{-1} este un operator închis.

Într-adevăr, graficul operatorului U^{-1} este mulțimea

$$\{(U(x),\ x)\mid x\in E\}\subset\mathfrak{Y}\times\mathfrak{X}$$

iar aplicația $(x,\ y)\to(y,\ x)$ a lui $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ pe $\mathfrak{Y}\times\mathfrak{X}$ este evident un homeomorfism.

Exemplu. Fie $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathbf{C}([0,\ 1])$ și $E=\mathbf{C}^1([0,\ 1])$. Să considerăm operatorul de derivare $U: E\to\mathfrak{Y}$. Operatorul U nu este continuu (a se vedea exemplul (3) din (1.1)) dar este închis. Într-adevăr, dacă $x_n\in\mathbf{C}^1([0,\ 1])$, $(n\in\mathbf{N})$ și $x\in\mathbf{C}([0,\ 1])$ iar $x=\lim\limits_n x_n$ în $\mathbf{C}([0,\ 1])$ și $y=\lim\limits_n U(x_n)$ de asemenea în $\mathbf{C}([0,\ 1])$, atunci $x(t)=\lim\limits_n x_n(t)$ uniform și $y(t)=\lim\limits_n x_n'(t)$ de asemenea uniform. Rezultă că funcția x este derivabilă și $y(t)=x'(t)$. Deci $x\in E$ și $y=U(x)$.

Teorema 1.6.1. *Orice operator liniar și închis U care aplică un spațiu Banach $\mathfrak{X}$ într-un spațiu Banach $\mathfrak{Y}$ este un operator continuu.*

Demonstrație. Prin ipoteză, graficul $G(U)$ al lui U este un subspațiu liniar închis al spațiului $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ care este un spațiu Banach (a se vedea Cap. III, teorema 2.1.1). Să observăm acum că punînd

$$V((x,\ U(x)))=x,\ (x\in G(U))$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem un operator liniar $V : G(U) \to \mathfrak{X}$. Se verifică ușor că V este continuu și că aplică biunivoc $G(U)$ pe $\mathfrak{X}$. În baza corolarului 1.5.1, V^{-1} este continuu, Pe de altă parte, punînd

$$S((x,\ U(x))) = U(x),\ (x \in G(U))$$

obținem un operator liniar și continuu S care aplică $G(U)$ pe codomeniul $H(U)$ al lui U.

Deoarece $U = SV^{-1}$, rezultă că U este continuu.

Teorema este demonstrată.

1.7. ECUAȚII OPERATORIALE LINIARE ÎN SPAȚII BANACH

În această secțiune vom nota cu $\mathfrak{X}$ un spațiu Banach oarecare. Vom nota cu $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ spațiul operatorilor liniari și continui care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$.

Lema 1.7.1. *Fie V un operator care aplică spațiul Banach $\mathfrak{X}$ în el însuși și pentru care există un număr λ cu $0<\lambda<1$ așa ca*

$$\|V(x') - V(x'')\| \leqslant \lambda \|x' - x''\| \tag{1.25}$$

oricare ar fi x', $x'' \in \mathfrak{X}$. Există atunci un element $x^* \in \mathfrak{X}$ și numai unul așa ca $V(x^*) = x^*$.

Demonstrație. Să considerăm un element oarecare $x_0 \in \mathfrak{X}$ și să definim prin inducție

$$x_n = V(x_{n-1}),\ (n \in \mathbf{N}).$$

Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|V(x_n) - V(x_{n-1})\| \leqslant \lambda \|x_n - x_{n-1}\|.$$

De aici rezultă

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \lambda^n \|x_1 - x_0\|.$$

Dacă $m > n$, atunci

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \ldots + \lambda^n)\|x_1 - x_0\| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda^k\right)\|x_1 - x_0\| = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|x_1 - x_0\|$$

și cum $0<\lambda<1$, rezultă că $\{x_n\}_{n \in N}$ este un șir Cauchy. Spațiul $\mathfrak{X}$ fiind complet, există $x^* = \lim\limits_n x_n$. Cum din (1.25) rezultă că operatorul V este continuu, avem

$$V(x^*) = V(\lim_n x_n) = \lim_n V(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*.$$

Dacă pentru un element x' avem

$$V(x') = x'$$

atunci cu (1.25)

$$\|x^* - x'\| = \|V(x^*) - V(x')\| \leqslant \lambda \|x^* - x'\|$$

și, cum $0<\lambda<1$, rezultă

$$\|x^* - x'\| = 0$$

adică $x^* = x'$.

Lema este demonstrată.

Elementul x^* din lema 1.7.1. se numeşte *punct fix* pentru operatorul V. El a fost găsit prin *metoda aproximaţiilor succesive.*

Observaţie. În demonstraţia lemei 1.7.1 am văzut că pentru $m>n$

$$||x_m - x_n|| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} ||x_1 - x_0||.$$

Trecînd la limită în raport cu m, obţinem

$$||x^* - x_n|| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} ||x_1 - x_0||.$$

Vom considera acum ecuaţia de forma

$$x = U(x) + y \tag{1.26}$$

unde $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, iar y un anumit element din $\mathfrak{X}$. Un element $x \in \mathfrak{X}$ pentru care egalitatea (1.26) este verificată se numeşte *soluţie.*

Teorema 1.7.1. *Dacă* $||U|| < 1$, *atunci ecuaţia* (1.26) *are soluţie unică şi această soluţie poate fi găsită prin metoda aproximaţiilor succesive.*

Demonstraţie. Vom defini un operator V pe $\mathfrak{X}$ prin formula

$$V(x) = U(x) + y.$$

Avem

$$||V(x') - V(x'')|| = ||U(x') - U(x'')|| = ||U(x' - x'')|| \leqslant ||U|| \cdot ||x' - x''||$$

deci V satisface condiţiile lemei 1.7.1. În baza acestei leme, există un element x^* şi numai unul pentru care

$$x^* = V(x^*) = U(x^*) + y$$

şi acest element se poate găsi prin metoda aproximaţiilor succesive.

Observaţii. (1) Ecuaţia (1.26) se mai poate scrie sub forma

$$(I - U)(x) = y$$

şi deci din teorema 1.7.1 rezultă că

$$(I - U)(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}.$$

(2) Să aplicăm metoda aproximaţiilor succesive luînd $x_0 = y$. Atunci

$$x_1 = V(x_0) = U(x_0) + y = U(y) + y$$

sau, notînd $U^0 = I$ şi $U^1 = U$,

$$x_1 = U^0(y) + U^1(y).$$

Prin inducţie se verifică egalitatea

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} U^k(y).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $x^* = \lim_n x_n$ rezultă

$$x^* = \sum_{n=0}^{\infty} U^n(y)$$

și deci

$$(I-U)^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} U^n(y).$$

Lema 1.7.2. *Fie* $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *așa ca* $U(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ *iar* U *să fie inversabil*[1], *și fie* $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *așa ca*

$$\|U^{-1}\| \, \|U-V\| \leqslant \rho < 1.$$

Atunci $V(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, *există* V^{-1} *și este continuu iar*

$$\|V^{-1}\| \leqslant (1-\rho)^{-1} \|U^{-1}\|.$$

Demonstrație. Deoarece

$$\|I - U^{-1}V\| = \|U^{-1}(U-V)\| \leqslant \|U^{-1}\| \cdot \|U-V\| \leqslant \rho < 1$$

în baza observației (2) din 1.4 și a observației (1) după teorema 1.7.1, din această secțiune, operatorul $U^{-1}V$ admite un invers continuu, $(U^{-1}V)(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ și

$$\|(U^{-1}V)^{-1}\| \leqslant (1-\rho)^{-1}. \tag{1.27}$$

Dacă egalitatea $V(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ n-ar avea loc, ar exista un element $y_0 \in \mathfrak{X}$ așa ca $y_0 \notin V(\mathfrak{X})$ și notînd $x_0 = U^{-1}(y_0)$, ar rezulta $x_0 \notin (U^{-1}V)(\mathfrak{X})$ ceea ce este contradictoriu.

Să observăm acum că notînd

$$T = (U^{-1}V)^{-1}U^{-1}$$

avem $TV = I$ de unde rezultă că V este inversabil și $T = V^{-1}$.

În sfîrșit, folosind (1.27) avem

$$\|V^{-1}\| = \|T\| = \|(U^{-1}V)^{-1}U^{-1}\| \leqslant \|(U^{-1}V)^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\| \leqslant (1-\rho)^{-1}\|U^{-1}\|.$$

și lema este demonstrată.

În restul secțiunii vom studia ecuația

$$(I-U)(x) = y \tag{1.28}$$

unde $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Vom considera totodată ecuația

$$(I-V)(x) = y \tag{1.29}$$

unde $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ iar

$$\|U-V\| \leqslant \lambda$$

unde λ este un număr cunoscut. Ecuația (1.29) va juca rolul de „ecuație aproximantă" față de ecuația (1.28).

Teorema 1.7.2. *Dacă* $U, V \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $\|U-V\| \leqslant \lambda$, $(I-U)(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ *și dacă* $I-U$ *are un invers satisfăcînd condiția*

$$\|(I-U)^{-1}\| < \frac{1}{\lambda}$$

[1] Cu corolarul 1.5.1, operatorul U^{-1} este continuu.

Scanned with OKEN Scanner

atunci $(I-V)(\mathfrak{X})=\mathfrak{X}$ *iar* $I-V$ *are un invers continuu. Dacă pentru un element* $y\in\mathfrak{X}$ *avem* $x=(I-U)^{-1}(y)$ *și* $x'=(I-V)^{-1}(y)$ *atunci*

$$||x-x'||\leqslant\lambda||(I-V)^{-1}||\,||x||. \tag{1.30}$$

Demonstrație. Faptul că $(I-V)(\mathfrak{X})=\mathfrak{X}$ și că $I-V$ are un invers (continuu) rezultă din lema 1.7.2., în care se înlocuiește U prin $I-U$, iar V prin $I-V$.

Vom stabili acum inegalitatea (1.30). Avem

$$x'=(I-V)^{-1}(y)=(I-V)^{-1}((I-U)(x))=(I-V)^{-1}((I-V)(x))-$$
$$-(I-V)^{-1}((U-V)(x))=x-(I-V)^{-1}((U-V)(x))$$

de unde rezultă

$$x-x'=(I-V)^{-1}((U-V)(x))$$

și deci

$$||x-x'||\leqslant||(I-V)^{-1}||\,||U-V||\,||x||\leqslant\lambda||(I-V)^{-1}||\,||x||,$$

adică (1.30).

Corolar 1.7.1. *Dacă în condițiile teoremei precedente avem*

$$||(I-V)^{-1}||\leqslant\rho<\frac{1}{\lambda}, \tag{1.31}$$

atunci

$$||x-x'||\leqslant\frac{\lambda\rho}{1-\lambda\rho}||x'||. \tag{1.32}$$

Demonstrație. Cu inegalitatea (1.30) și cu (1.31) rezultă

$$||x-x'||\leqslant\lambda\rho||x||\leqslant\lambda\rho||x-x'||+\lambda\rho||x'||$$

de unde

$$(1-\lambda\rho)||x-x'||\leqslant\lambda\rho||x'||$$

adică (1.32).

Exemple și aplicații. (1) *Sisteme infinite de ecuații algebrice liniare.* Un astfel de sistem este de forma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}\,\xi_k=\beta_j,\ (j\in\mathbf{N}) \tag{1.33}$$

unde α_{jk} și β_j sînt numere date (pe care le vom presupune reale). O soluție a sistemului (1.33) este un șir $\{\xi_k\}_{k\in N}$ de numere (reale) pentru care, oricare ar fi j, seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}\,\xi_k$$

este convergentă și are suma β_j. Dacă soluția este reprezentată de un șir mărginit, atunci ea se zice *soluție mărginită.*

Sistemul (1.33) se poate scrie sub forma

$$\xi_j=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}\,\xi_k+\beta_j,\ (j\in\mathbf{N}). \tag{1.34}$$

Sistemul (1.34) se zice complet regulat dacă există un număr pozitiv $\rho<1$ așa ca

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_{jk}| \leqslant \rho, \ (j \in \mathbf{N}). \tag{1.35}$$

Să considerăm mulțimea $(\mathbf{m})$ a tuturor șirurilor mărginite $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de numere reale, organizată ca spațiu Banach cu operațiile naturale și cu norma

$$||x|| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |\xi_n|.$$

Să presupunem că sistemul (1.34) este complet regulat. Să notăm

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{jk}\,\xi_k, \ (j \in \mathbf{N}) \tag{1.36}$$

Dacă $x=\{\xi_k\}_{k\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{m})$, atunci $y=\{\eta_j\}_{j\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{m})$. Într-adevăr, cu (1.35) rezultă

$$|\eta_j| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_{jk}||\xi_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_{jk}|\right)||x|| \leqslant \rho||x||. \tag{1.37}$$

Pentru orice $x \in (\mathbf{m})$ să punem $y=U(x)$, dacă $y=\{\eta_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ se obține din $x=\{\xi_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ cu (1.36). Atunci U este un operator liniar[1] care aplică $(\mathbf{m})$ în $(\mathbf{m})$. Acest operator este și continuu deoarece din (1.37) rezultă

$$||y|| = \sup_{j\in\mathbf{N}} |\eta_j| \leqslant \rho||x||.$$

În plus se observă că

$$||U|| \leqslant \rho < 1.$$

Să punem acum $\mathrm{b}=\{\beta_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ și să presupunem că $\mathrm{b} \in (\mathbf{m})$. Atunci sistemul (1.34) se poate scrie sub forma

$$x = U(x) + \mathrm{b}.$$

În baza teoremei 1.7.1, sistemul complet regulat are o soluție mărginită unică și această soluție poate fi găsită prin metoda aproximațiilor succesive.

Dacă $|\beta_j| \leqslant \beta$, $(j \in \mathbf{N})$, atunci cu Observația (2) din (1.4) rezultă

$$|\xi_j| \leqslant \frac{\beta}{1-\rho}, \ (j \in \mathbf{N}).$$

(2) *Ecuații integrale.* O ecuație integrală de tip Fredholm este de forma

$$x(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)x(t)\mathrm{d}t + z(s) \tag{1.38}$$

unde φ este o funcție (reală) continuă pe $[0, 1]\times[0, 1]$ numită nucleul ecuației, iar z o funcție (reală) continuă pe $[0, 1]$. Segmentul $[0, 1]$ se poate înlocui dealtfel și cu un segment oarecare.

[1] Operator matricial (cap. I, sect. 2.1).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm cu U operatorul integral corespunzător lui φ adică operatorul definit pe $C([0,1])$ prin

$$y=U(x)\Leftrightarrow y(s)=\int_0^1 \varphi(s,\,t)x(t)\mathrm{d}t$$

(a se vedea și exemplul (4) din secțiunea (1.1)), atunci ecuația (1.38) se poate scrie sub forma

$$x=U(x)+z.$$

Să considerăm acum o ecuație de tip Fredholm cu nucleu „degenerat", adică de forma

$$\varphi_1(s,\,t)=\sum_{j=1}^{n} a_j(s)b_j(t)$$

unde a_j și b_j sînt continue. Notînd

$$\xi_j=\int_0^1 b_j(t)x(t)\mathrm{d}t,\ (j=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{1.39}$$

soluția ecuației va fi o funcție x de forma

$$x(s)=\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j(s)+z(s). \tag{1.40}$$

Problema găsirii soluției se reduce astfel la găsirea coeficienților ξ_j din expresia (1.40) a lui $x(s)$.

Înlocuind expresia (1.40) a lui $x(s)$ în (1.39), obținem

$$\xi_j=\int_0^1 b_j(t)\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i(t)+z(t)\right]\mathrm{d}t$$

și notînd

$$\alpha_{ji}=\int_0^1 b_j(t)a_i(t)\mathrm{d}t,\ \beta_j=\int_0^1 b_j(t)z(t)\mathrm{d}t$$

obținem în sfîrșit

$$\xi_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ji}\xi_i+\beta_j,\ (j=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Problema rezolvării unei ecuații integrale cu nucleu degenerat se reduce deci la problema rezolvării unui sistem (finit) de ecuații algebrice liniare.

Deoarece ecuațiile cu nucleu degenerat se rezolvă în mod simplu, este convenabil a se aproxima o ecuație de forma (1.38) cu o ecuație asemănătoare în care nucleul este degenerat.

Dacă notăm cu V operatorul integral corespunzător lui φ_1, atunci ecuația integrală corespunzătoare se scrie sub forma:

$$x=V(x)+z.$$

Remarcăm că dacă

$$|\varphi(s,\,t)-\varphi_1(s,\,t)|\leqslant\lambda$$

Scanned with OKEN Scanner

oricare ar fi $s, t \in [0,1]$ atunci

$$||U - V|| \leqslant \lambda.$$

Se pot atunci aplica teorema 1.7.2 și corolarul 1.7.1.

1.8. PUNCTE FIXE PENTRU MULȚIMI DE OPERATORI LINIARI ȘI CONTINUI

O mulțime $\mathscr{U}$ de operatori care aplică un spațiu liniar $\mathfrak{X}$ în el însuși se numește *comutativă*, dacă $UV = VU$, oricare ar fi $U, V \in \mathscr{U}$.

Teorema 1.8.1. (*Markov-Kakutani*). *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar topologic separat și $\mathscr{U}$ o mulțime comutativă de operatori liniari și continui care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$. Dacă există o submulțime convexă și compactă $E \subset \mathfrak{X}$ astfel ca $U(E) \subset E$, $\forall U \in \mathscr{U}$, atunci există $x_0 \in E$ astfel ca $U(x_0) = x_0$, $\forall U \in \mathscr{U}$.*

Demonstrație. Pentru orice $U \in \mathscr{U}$ și $n \in \mathbf{N}$ să punem

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k$$

unde $U^0 = I$ și $U^1 = U$. Să notăm

$$E = \{U_n(E) \mid U \in \mathscr{U},\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Pentru fiecare n, operatorul U_n fiind liniar și continuu, mulțimea $U_n(E)$ este convexă și compactă. Din $U(E) \subset E$ și din convexitatea lui E rezultă $U_n(E) \subset E$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Pe de altă parte, dacă $U, V \in \mathscr{U}$, atunci $U_n V_n = V_n U_n$, $(\forall n \in \mathbf{N})$ și deci

$$(U_n V_n)(E) \subset U_n(E) \bigcap V_n(E),\ (\forall U, V \in \mathscr{U}).$$

Rezultă că E este un lanț de mulțimi închise conținute în E, deci aceste mulțimi au un punct comun x_0. Să presupunem că ar exista $U \in \mathscr{U}$ așa ca $U(x_0) \neq x_0$. Spațiul $\mathfrak{X}$ fiind separat, există o vecinătate echilibrată W a originii așa ca $U(x_0) - x_0 \notin W$. Deoarece pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem $x_0 \in U_n(E)$, există $x_1 \in E$ așa ca

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(x_1)$$

deci

$$U(x_0) - x_0 = \frac{1}{n}(U^n(x_1) - x_1) \subset \frac{1}{n}(E - E).$$

Cum $U(x_0) - x_0 \notin W$ rezultă

$$\frac{1}{n}(E - E) \not\subset W,\ (\forall n \in \mathbf{N})$$

ceea ce este contradictoriu, deoarece mulțimea $E - E$ este compactă (ca imagine a lui E prin aplicația continuă $(x, y) \to x - y$) și deci mărginită.

Observație. Teorema precedentă arată, în particular, că dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar topologic separat iar $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ un operator liniar și continuu care invariază o mulțime convexă și compactă E (adică $U(E) \subset E$) atunci există un punct fix $x_0 \in E$ (adică $U(x_0) = x_0$). În ultimul capitol vom vedea

Scanned with OKEN Scanner

că într-o submulțime convexă și compactă E a unui spațiu local convex separat $\mathfrak{X}$ astfel ca $U(E) \subset E$ pentru un anumit operator continuu U, există un punct fix pentru U, chiar dacă operatorul U nu este liniar.

§ 2. CONJUGATUL UNUI SPAȚIU LINIAR NORMAT

Toate rezultatele stabilite pentru operatori liniari și continui care aplică un spațiu normat $\mathfrak{X}$ într-un spațiu normat $\mathcal{Y}$ rămîn în particular adevărate pentru funcționale liniare și continue, dacă în spațiul Γ se pune $||\alpha|| = |\alpha|$.

În cazul funcționalelor se pot stabili și alte rezultate.

2.1. FUNCȚIONALE LINIARE ȘI CONTINUE PE SPAȚII NORMATE

Vom observa mai întîi că din teorema 2.5.1, cap. I, a lui Hahn Banach (în cazul real) și din teorema 2.6.1, cap. I (în cazul complex), punînd

$$p(x) = ||f_0||\, ||x||$$

obținem următoarea teoremă:

Teorema 2.1.1. *Fie $\mathfrak{X}_0$ un subspațiu liniar al spațiului liniar normat $\mathfrak{X}$. Dacă f_0 este o funcțională liniară și continuă definită pe $\mathfrak{X}_0$ atunci există o funcțională liniară și continuă f definită pe $\mathfrak{X}$ așa ca $f(x) = f_0(x)$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}_0$ și $||f|| = ||f_0||$.*

Cu alte cuvinte f_0 se poate prelungi pe tot spațiul cu păstrarea liniarității, continuității și normei.

Din teoremele 2.5.2, 2.6.2 din cap. I, obținem:

Teorema 2.1.2. *Pentru orice element x_0 al spațiului normat $\mathfrak{X}$, există o funcțională liniară și continuă f pe $\mathfrak{X}$, așa ca $f(x_0) = ||x_0||$ și $||f|| = 1$.*

Vom stabili acum o altă teoremă.

Teorema 2.1.3. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar normat, A o submulțime oarecare a lui $\mathfrak{X}$, h o funcțională pe A și μ un număr pozitiv. Pentru ca să existe o funcțională liniară și continuă f definită pe $\mathfrak{X}$ așa ca $f(x) = h(x)$ pentru $x \in A$ și $||f|| \leqslant \mu$, este necesar și suficient ca*

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(x_i)| \leqslant \mu \,||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \tag{2.1}$$

pentru orice număr finit de elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din A și orice numere $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Demonstrație. Dacă există funcționala f cu proprietățile din enunț, atunci

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(x_i)| = |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)| = |f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)| \leqslant ||f||\, ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leqslant \mu\, ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i||,$$

obținîndu-se inegalitatea (2.1).

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, să presupunem inegalitatea din enunț verificată. Fie $E=\mathbf{Sp}(A)$, deci

$$E=\left\{y \mid y=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i;\ \alpha_i \in \Gamma,\ x_i \in A\right\}.$$

Definim pe E funcționala

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(x_i).$$

Ea este definită în mod unic, căci, dacă

$$y=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i=\sum_{k=1}^{m} \alpha'_k x'_k$$

atunci

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(x_i)-\sum_{k=1}^{m} \alpha'_k h(x'_k)\right| \leqslant \mu \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i-\sum_{k=1}^{m} \alpha'_k x'_k\right\|=0.$$

Ea este liniară, după cum se verifică ușor.

Ea este continuă, deoarece cu (2.1) avem

$$\|g(y)\|=\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h(x_i)\right| \leqslant \mu \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|=\mu\|y\|$$

și avem $\|g\| \leqslant \mu$.

În baza teoremei 2.1.1 există o funcțională liniară și continuă f definită pe $\mathfrak{X}$ care prelungește pe g cu păstrarea liniarității, continuității și normei.

Exerciții. (1) Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar normat. Vom nota cu $\mathbf{d}(x_0, E)$ distanța dintre un element x_0 și o submulțime E a lui $\mathfrak{X}$ adică

$$\mathbf{d}(x_0, E)=\inf_{x \in E} \|x_0-x\|.$$

Fie E un subspațiu liniar a lui $\mathfrak{X}$ și fie $x_0 \in \mathfrak{X}$ așa ca $\mathbf{d}(x_0, E)=\delta>0$. În baza teoremei 2.5.2 din Cap. II, există o funcțională liniară și continuă f pe $\mathfrak{X}$, așa ca $f(x_0)=1$ și $f(x)=0$, $\forall x \in E$ (căci $x_0 \notin \overline{E}$). Să se arate că funcționala f se poate construi în așa fel ca $\|f\|=1/\delta$.

(2) Fie A o submulțime (nevidă) a unui spațiu liniar normat $\mathfrak{X}$ și $x_0 \in \mathfrak{X}$. Să se stabilească următoarea propoziție:

Pentru ca să existe un șir $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de combinații liniare de elemente din A așa ca $x_0=\lim_n y_n$ este necesar și suficient ca din $f \in \mathfrak{X}^*$ și $f(A)=\{0\}$ să rezulte $f(x_0)=0$ (unde $\mathfrak{X}^*$ este mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe $\mathfrak{X}$).

2.2. FORMA GENERALĂ A FUNCȚIONALELOR LINIARE ȘI CONTINUE PE ANUMITE SPAȚII CONCRETE

Vom considera aici cazul spațiilor concrete (reale) (c), (l^p), C([0, 1]), $L^p([0, 1])$ cu normele obișnuite[1].

[1] A se vedea Cap. III, § 3, Pentru simplificare, scriem (c) în loc de ($c_{\mathbf{R}}$) și analog în cazul celorlalte spații.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.2.1. *Dacă* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}\in(\mathrm{l})$ *atunci formula*

$$f(x)=\alpha\lim_n \xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n,\quad (x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}\in(\mathrm{c})) \tag{2.2}$$

definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul (c).

Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă f *pe spațiul* (c), *există* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}\in(\mathrm{l})$ *și* $\alpha\in\Gamma$ *astfel ca* f *să se reprezinte sub forma* (2.2) *iar*

$$\|f\|=|\alpha|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|. \tag{2.3}$$

Demonstrație. Formula (2.2), cu $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ definește evident o funcțională liniară pe (c). Din inegalitatea:

$$|\alpha\lim_n \xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n|\leqslant\left(|\alpha|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\right)(\sup_{n\in\mathbf{N}}|\xi_n|)$$

rezultă că f este continuă și că

$$\|f\|\leqslant|\alpha|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|. \tag{2.4}$$

Reciproc, fie f o funcțională liniară și continuă (nenulă) pe (c). Să considerăm următoarele elemente ale spațiului (c)

$$x_n=\{\delta_{ni}\}_{i\in\mathbf{N}},\quad x_0=\{\delta_{ii}\}_{i\in\mathbf{N}}$$

unde δ_{ni} este simbolul lui Kronecker, iar n un număr natural oarecare. Fie $x\in(\mathrm{c})$ și anume $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ iar $\xi_0=\lim_n \xi_n$.

Avem

$$x=\xi_0x_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)x_n \tag{2.5}$$

deoarece

$$\|x-\xi_0x_0-\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\xi_0)x_i\|=\sup_{i>n}|\xi_i-\xi_0|.$$

Fie

$$f(x_n)=\alpha_n,\quad f(x_0)=\alpha_0.$$

Avem cu (2.5)

$$f(x)=\xi_0f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)f(x_n)=\xi_0\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n-\xi_0)\alpha_n.$$

Să arătăm acum că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ este absolut convergentă. Fie

$$\xi_k^i=\begin{cases}\operatorname{sign}\alpha_i & \text{dacă } i\leqslant k\\ 0 & \text{dacă } i>k.\end{cases}$$

Avem

$$\xi_k^0 = \lim_{i\to\infty} \xi_k^i = 0.$$

Să considerăm elementul $x_k = \{\xi_k^i\}_{i\in\mathbf{N}}$. Avem

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|$$

și din

$$|f(x_k)| \leqslant \|f\| \, \|x_k\| \leqslant \|f\|$$

rezultă

$$\sum_{i=1} |\alpha_i| \leqslant \|f\|$$

oricare ar fi $k\in\mathbf{N}$. Seria $\sum_i |\alpha_i|$ este deci convergentă.

Punînd

$$\alpha = \alpha_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i.$$

obținem

$$f(x) = \alpha\xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n \,.$$

Să punem acum

$$\eta_k^i = \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_i & \text{dacă } i \leqslant k \\ \operatorname{sign} \alpha & \text{dacă } i > k \end{cases}$$

și $y_k = \{\eta_k^i\}_{i\in\mathbf{N}}$. Avem $\|y_k\| \leqslant 1$ și

$$\eta_k^0 = \lim_{i\to\infty} \eta_k^i = \operatorname{sign} \alpha$$

de unde

$$f(y_k) = |\alpha| + \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| + \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i \operatorname{sign} \alpha \leqslant \|l\|$$

oricare ar fi $k\in\mathbf{N}$, deci

$$|\alpha| + \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leqslant \|f\|.$$

Cu (2.4) rezultă (2.3).

Teorema 2.2.2. *Dacă* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathrm{m})$ *atunci formula*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n, \quad (x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathrm{l})) \tag{2.6}$$

definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul (l). *Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă* f *pe* (l) *există* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathrm{m})$ *astfel ca* f *să se reprezinte sub forma* (2.6) *iar*

$$\|f\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |\alpha_n|. \tag{2.7}$$

Demonstrație. Formula (2.6) cu $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}\in(\mathbf{m})$ definește evident o funcțională liniară pe (l). Din inegalitatea

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n\right|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\right)\sup_{n\in\mathbf{N}}|\alpha_n|$$

rezultă că f este continuă și

$$\|f\|\leqslant\sup_{n\in\mathbf{N}}|\alpha_n|. \tag{2.8}$$

Reciproc, fie f o funcțională liniară și continuă pe (l).
Să considerăm următoarele elemente ale spațiului (l):

$$x_n=\{\delta_{ni}\}_{i\in\mathbf{N}},\ (n\in\mathbf{N})$$

unde δ_{ni} este simbolul lui Kronecker.
Pentru un element oarecare $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ din (l) avem

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\xi_kx_k\|=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|$$

ceea ce arată că

$$\lim_n\|x-\sum_{k=1}^{n}\xi_kx_k\|=0$$

deci

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nx_n.$$

Rezultă

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nf(x_n)$$

sau, notînd $\alpha_n=f(x_n)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n.$$

Rămîne să calculăm norma funcționalei f.
Să punem

$$\xi_{nk}=\begin{cases}\operatorname{sign}\alpha_n, & \text{pentru } k=n\\ 0 & \text{pentru } k\neq n\end{cases}$$

și să considerăm elementele

$$x_n=\{\xi_{n,k}\}_{k\in\mathbf{N}},\ (n\in\mathbf{N}),$$

Avem $\|x_n\|\leqslant1$ și deci

$$|\alpha_n|=f(x_n)\leqslant\|f\|.$$

De aici și din (2.8) rezultă (2.7).

Teorema 2.2.3. *Dacă* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}\in(\mathbf{l}^q)$, $(q>1)$, *atunci formula*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n,\ (x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}\in(\mathbf{l}^p)) \tag{2.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $1/p+1/q=1$, *definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul* (l^p). *Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă* f *pe* (l^p), $(p>1)$ *există*[1] $\{\alpha_n\}_{n\in N}\in(l^q)$ *astfel ca* f *să se reprezinte sub forma* (2.9) *iar*

$$\|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^q\right)^{1/q}. \tag{2.10}$$

Demonstrație. Formula (2.9) cu $\{\alpha_n\}_{n\in N}\in(l^q)$ definește evident o funcțională liniară pe (l^p). Din inegalitatea lui Hölder

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n\right|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}$$

rezultă că f este continuă și că

$$\|f\|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^q\right)^{1/q}. \tag{2.11}$$

Reciproc, fie f o funcțională liniară și continuă pe spațiul (l^p), $(p>1)$. Pentru un element oarecare $x=\{\xi_n\}_{n\in N}\in(l^p)$ avem, punînd $x_n=\{\delta_{ni}\}_{i\in N}$

$$\left\|x-\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\right\|=\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{1/p}$$

ceea ce arată că

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nx_n.$$

Rezultă

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_nf(x_n)$$

și notînd $\alpha_n=f(x_n)$ obținem (2.9).

Să calculăm norma lui f.

Să punem

$$\xi_{nk}=\begin{cases}|\alpha_n|^{q-2}\alpha_n & \text{dacă } n\leqslant k\\ 0 & \text{dacă } n>k.\end{cases}$$

Să considerăm elementele

$$x_n=\{\xi_{nk}\}_{k\in N},\quad (n\in N).$$

Avem

$$\|x_n\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^q\right)^{1/p}$$

și deci

$$\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^q=f(x_n)\leqslant\|f\|\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^q\right)^{1/p}.$$

Rezultă

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^q\right)^{1/q}=\left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|$$

[1] Atît în enunțul teoremei cît și în demonstrație se subînțelege că $1/p+1/q=1$.

și trecînd la limită în raport cu n

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^q\right)^{1/q} \leqslant \|f\|.$$

De aici și din (2.11) rezultă (2.10).

Teorema 2.2.4. *Dacă φ este o funcție reală cu variație mărginită pe segmentul $[0, 1]$, atunci formula*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t), \quad (x \in \mathbf{C}([0, 1]) \tag{2.12}$$

definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathbf{C}([0, 1])$. Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă f pe spațiul $\mathbf{C}([0, 1])$ există o funcție reală φ pe $[0, 1]$ cu variație mărginită astfel ca (2.12) să aibă loc, iar

$$\|f\| = \operatorname*{var}_0^1 \varphi(t). \tag{2.13}$$

Demonstrație. Formula (2.12) definește evident o funcțională liniară pe $\mathbf{C}([0, 1])$ iar din inegalitatea

$$\left|\int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}\varphi(t)\right| \leqslant \left(\operatorname*{var}_0^1 \varphi(t)\right) \left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|\right)$$

rezultă că f este continuă și că

$$\|f\| \leqslant \operatorname*{var}_0^1 \varphi(t). \tag{2.14}$$

Reciproc, fie f o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathbf{C}([0, 1])$. Cu teorema 2.1.1, funcționala f se poate prelungi pe spațiul $\mathbf{B}([0, 1])$ (al funcțiilor reale mărginite pe $[0, 1]$) cu păstrarea liniarității, continuității și normei. Prelungirea considerată se va nota tot prin f.

Pentru fiecare punct $t \in (0, 1]$ vom nota cu z_t funcția caracteristică a segmentului $[0, t]$. Vom considera apoi funcția φ definită astfel

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(z_t) & \text{dacă } 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{dacă } t = 0. \end{cases}$$

Să arătăm că φ este cu variație mărginită. Să considerăm o diviziune oarecare a segmentului $[0, 1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1. \tag{2.15}$$

Să notăm

$$\sigma_j = \operatorname{sign}(\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j))$$

și să punem

$$y = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j (z_{t_{j+1}} - z_{t_j})$$

unde $z_{t_0} = z_0 = 0$. Avem $y \in \mathbf{B}([0, 1])$ și $\|y\| \leqslant 1$, de unde

$$f(y) \leqslant \|f\| \tag{2.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$f(y)=\sum_{j=0}^{n-1}|\varphi(t_{j+1})-\varphi(t_j)|$$

cu (2.16) rezultă că φ este cu variație mărginită și

$$\operatorname*{var}_0^1 \varphi(t)\leqslant\|f\|. \tag{2.17}$$

Fie acum un element oarecare $x\in\mathbf{C}([0,1])$. Fie $\varepsilon>0$ și să considerăm un număr $\eta>0$ așa ca

$$|x(t')-x(t'')|<\varepsilon$$

dacă $|t'-t''|<\eta$. Să considerăm o diviziune (2.15) a segmentului $[0,1]$ așa ca $t_{j+1}-t_j<\eta$. Fie $s_j\in[t_j,t_{j+1}]$, $(j=0,1,\ldots,n-1)$ și să punem

$$v=\sum_{j=0}^{n-1}x(s_j)(z_{t_{j+1}}-z_{t_j}).$$

Avem evident $v\in\mathbf{B}([0,1])$ precum și $|x(t)-v(t)|<\varepsilon$, de unde rezultă $\|x-v\|\leqslant\varepsilon$. Deci

$$|f(x)-f(v)|\leqslant\|f\|\varepsilon. \tag{2.18}$$

Pe de altă parte

$$f(v)=\sum_{j=0}^{n-1}x(s_j)[\varphi(t_{j+1})-\varphi(t_j)]$$

și cum ε a fost arbitrar, cu (2.18) rezultă (2.12). Din (2.14) și (2.17) rezultă (2.13).

Teorema 2.2.5. *Dacă φ este o funcție reală definită pe segmentul $[0,1]$ măsurabilă și mărginită aproape peste tot, atunci formula*

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\ (x\in\mathbf{L}([0,1]) \tag{2.19}$$

definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathbf{L}([0,1])$. Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă f pe $\mathbf{L}([0,1])$ există o funcție reală φ măsurabilă și mărginită aproape peste tot pe $[0,1]$ astfel ca (2.19) să aibă loc iar

$$\|f\|=\operatorname*{ad\,max}_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|. \tag{2.20}$$

Demonstrație. Formula (2.19) definește evident o funcțională liniară pe $\mathbf{L}([0,1])$ iar din

$$\left|\int_0^1 x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_0^1|x(t)|\mathrm{d}t\right)\left(\operatorname*{ad\,max}_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|\right)$$

rezultă că f este continuă și

$$\|f\|\leqslant\operatorname*{ad\,max}_{0\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)|. \tag{2.21}$$

Reciproc, fie f o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathbf{L}([0, 1])$. Să notăm cu z_t funcția caracteristică a segmentului $[0, t]$ și să notăm (ca de obicei) tot cu z_t elementul corespunzător din $\mathbf{L}([0, 1])$. Să punem

$$\psi(t)=f(z_t),\ (t\in[0, 1])$$

și să arătăm că funcția ψ este absolut continuă[1].

Să considerăm segmentele $[t_i, t_i']\subset[0, 1]$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ care au în comun cel mult extremitățile. Dacă punem

$$\sigma_i=\operatorname{sign}(\psi(t_i')-\psi(t_i))$$

atunci

$$\sum_{i=1}^{n}|\psi(t_i')-\psi(t_i)|=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i[\psi(t_i')-\psi(t_i)]=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i[f(z_{t_i'})-f(z_{t_i})]=$$

$$=f\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(z_{t_i'}-z_{t_i})\right)\leqslant\|f\|\,\Big\|\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(z_{t_i'}-z_{t_i})\Big\|=$$

$$=\|f\|\int_0^1\Big|\sum_{i=1}^{n}\sigma_i[z_{t_i'}(s)-z_{t_i}(s)]\Big|\,ds\leqslant\|f\|\sum_{i=1}^{n}(t_i'-t_i)$$

deci ψ este absolut continuă. Există atunci o funcție reală integrabilă φ pe $[0,1]$ așa ca

$$\psi(t)=\int_0^t\varphi(\tau)d\tau+\psi(0).$$

Deoarece

$$\psi(0)=f(z_0)=f(0)=0$$

putem scrie

$$f(z_t)=\int_0^1 z_t(s)\varphi(s)ds.$$

Fie acum x o funcție în scară, adică de forma

$$x(s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[z_{t_i}(s)-z_{t_{i-1}}(s)]$$

---

[1] O funcție reală ψ definită pe un segment $T=[\alpha, \beta]$ al axei reale este absolut continuă dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $\eta>0$ așa ca $\sum_{j=1}^{n}|\psi(t_j')-\psi(t_j)|<\varepsilon$ pentru orice sistem $[t_j, t_j']$, $(j=1, 2, \ldots, n)$ de segmente (care au în comun cel mult extremitățile) și pentru care $\sum_{j=1}^{n}(t_j'-t_j)<\eta$. Dacă ψ este absolut continuă, atunci există o funcție integrabilă φ așa ca $\psi(t)=\int_\alpha^t\varphi(t)dt+\psi(\alpha)$. A se vedea, de exemplu, J. Mc. Shane, Integration, sau I. P. Natanson, Teoria funcțiilor de variabilă reală, Editura tehnică, 1957.

unde

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$$

Avem

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\int_0^1 z_{t_i}(s)\varphi(s)\mathrm{d}s-\int_0^1 z_{t_{i-1}}(s)\varphi(s)\mathrm{d}s\Big)=$$

$$=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i[z_{t_i}(s)-z_{t_{i-1}}(s)]\right)\varphi(s)\mathrm{d}s=\int_0^1 x(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$$

deci $f(x)$ are forma (2.19) dacă x este o funcţie în scară.

Dacă x este o funcţie măsurabilă şi mărginită, atunci există un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de funcţii în scară, care converge aproape peste tot către x şi în acelaşi timp converge în medie către aceeaşi funcţie. Deci $x=\lim_n x_n$ în spaţiul $\mathbf{L}([0,\,1])$. Funcţionala f fiind continuă, rezultă

$$f(x)=\lim_n\int_0^1 x_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Am arătat deci că $f(x)$ are forma (2.19) şi în cazul cînd x este o funcţie măsurabilă şi mărginită.

Fie acum $s\in(0,\,1)$ şi $\theta>0$ aşa ca $s+\theta\in(0,\,1)$. Să punem

$$x_0(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\text{ dacă } s\leqslant t\leqslant s+\theta\\ 0\text{ dacă } 0\leqslant t<s\text{ sau } s+\theta<t\leqslant 1.\end{cases}$$

Avem

$$|f(x_0)|=\Big|\int_0^1 x_0(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|=\frac{1}{\theta}\Big|\int_s^{s+\theta}\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|$$

şi cum $\|x_0\|=1$ rezultă

$$\Big|\int_s^{s+\theta}\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|\leqslant\|f\|\theta.$$

Deci funcţia ψ dată de formula

$$\psi(t)=\int_0^t\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad(t\in[0,\,1])$$

satisface condiţia lui Lipschitz. Deoarece funcţia ψ admite derivată aproape peste tot egală cu φ, se deduce de asemenea

$$|\varphi(t)|\leqslant\|f\|\quad\text{a.p.t.}\tag{2.22}$$

Deci φ este o funcţie (măsurabilă) mărginită aproape peste tot.

Fie acum x o funcţie integrabilă oarecare pe $[0,\,1]$ şi să punem

$$x_n(t)=\begin{cases}x(t) & \text{dacă } |x(t)|<n\\ (\operatorname{sign}x(t))n & \text{dacă } |x(t)|\geqslant n.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Este evident că $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge în medie către x, deci $x=\lim_n x_n$ în spațiul $\mathbf{L}([0, 1])$. Funcționala f fiind continuă

$$f(x)=\lim_n f(x_n)=\lim_n \int_0^1 x_n(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

deci are loc (2.19), oricare ar fi $x\in\mathbf{L}([0, 1])$.

Din (2.21) și (2.22) rezultă (2.20).

Teorema 2.2.6. *Dacă φ este o funcție reală q-integrabilă pe segmentul* $[0, 1]$, *cu* $q>1$, *atunci formula*

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\ (x\in\mathbf{L}^p([0, 1])) \tag{2.23}$$

unde $1/p+1/q=1$, *definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul* $\mathbf{L}^p([0, 1])$. *Reciproc, pentru orice funcțională liniară și continuă* f pe $\mathbf{L}^p([0, 1])$, *cu* $p>1$, *există*[1] *o funcție q-integrabilă* φ *pe* $[0, 1]$ *astfel ca* (2.23) *să aibă loc, iar*

$$\|f\|=\Big(\int_0^1|\varphi(t)|^q\mathrm{d}t\Big)^{1/q}. \tag{2.24}$$

Demonstrație. Formula (2.23) definește evident o funcțională liniară pe $\mathbf{L}^p([0, 1])$ iar din inegalitatea lui Hölder

$$\Big|\int_0^1 x(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|\leqslant\Big(\int_0^1|x(t)|^p\mathrm{d}t\Big)^{1/p}\Big(\int_0^1|\varphi(t)|^q\mathrm{d}t\Big)^{1/q}$$

rezultă că f este continuă și

$$\|f\|\leqslant\Big(\int_0^1|\varphi(t)|^q\mathrm{d}t\Big)^{1/q}. \tag{2.25}$$

Reciproc, fie f o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathbf{L}^p([0, 1])$, cu $p>1$. Să notăm cu z_t funcția caracteristică a segmentului $[0, t]$ și să notăm tot cu z_t elementul corespunzător din $\mathbf{L}^p([0, 1])$. Să punem

$$\psi(t)=f(z_t),\ (t\in[0, 1]).$$

Ca și în demonstrația teoremei 2.2.3 arătăm că dacă segmentele $[t_i\ t_i']\subset[0, 1]$, $(i=1, 2, \ldots, n)$ au în comun cel mult extremitățile, atunci

$$\sum_{i=1}^n|\psi(t_i')-\psi(t_i)|\leqslant\|f\|\Big(\sum_{i=1}^n(t_i'-t_i)\Big)^{1/p}$$

deci funcția ψ este absolut continuă. Există atunci o funcție integrabilă φ pe $[0, 1]$ așa ca

$$\psi(t)=\int_0^t\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Tot ca în demonstrația teoremei 2.2.3, arătăm mai departe că $f(x)$ este de forma (2.23) dacă x este o funcție măsurabilă și mărginită.

[1] Atît în enunțul teoremei cît și în demonstrație se va subînțelege că $1/p+1/q=1$.

Scanned with OKEN Scanner

Să punem acum (pentru orice $n \in \mathbf{N}$)

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} |\varphi(t)|^{q-2}\varphi(t) & \text{dacă } |\varphi(t)|^{q-1} < n^{1/p} \\ (\operatorname{sign} \varphi(t)) n^{1/p} & \text{dacă } |\varphi(t)|^{q-1} \geqslant n^{1/p} \end{cases}$$

Fiecare funcție φ_n este măsurabilă. Avem

$$\varphi_n(t)\varphi(t) = |\varphi_n(t)||\varphi(t)| \geqslant |\varphi_n(t)||\varphi_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}$$

și deci

$$\int_0^1 |\varphi_n(t)|^{\frac{q}{q-1}} dt \leqslant \int_0^1 \varphi_n(t)\varphi(t)dt = f(\varphi_n) \leqslant \|f\| \Big(\int_0^1 |\varphi_n(t)|^p dt \Big)^{1/p}.$$

Rezultă

$$\Big(\int_0^1 |\varphi_n(t)|^p dt \Big)^{1/q} \leqslant \|f\| \tag{2.26}$$

deoarece $q/(q-1) = p$. Să observăm acum că

$$|\varphi_n(t)|^p = \begin{cases} |\varphi(t)|^q & \text{dacă } |\varphi(t)|^{p(q-1)} < n \\ n & \text{dacă } |\varphi(t)|^{p(q-1)} \geqslant n \end{cases}$$

iar șirul integralelor funcțiilor $|\varphi_n|^p$ este crescător. Acest șir fiind și mărginit, este convergent. Funcția $|\varphi|^q$ este deci integrabilă și cu (2.26) rezultă

$$\Big(\int_0^1 |\varphi(t)|^q dt \Big)^{1/q} \leqslant \|f\|.$$

Fie acum x o funcție p-integrabilă și să punem pentru $n \in \mathbf{N}$

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t) & \text{dacă } |x(t)| < n^{1/p} \\ (\operatorname{sign} x(t)) n^{1/p} & \text{dacă } |x(t)| \geqslant n^{1/p}. \end{cases}$$

Pentru fiecare n să considerăm mulțimea

$$A_n = \{t \in [0, 1] \,|\, |x(t)| \geqslant n^{1/p}\}$$

Avem

$$\Big(\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^p dt \Big)^{1/p} = \Big(\int_{A_n} |x(t) - x_n(t)|^p dt \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_{A_n} |x(t)|^p dt \Big)^{1/p} + \Big(\int_{A_n} |x_n(t)|^p dt \Big)^{1/p}.$$

Funcția $|x|^p$ fiind integrabilă, ultimele două integrale tind către zero. Rezultă $x = \lim_n x_n$ în spațiul $\mathbf{L}^p([0, 1])$. Funcționala f fiind continuă.

$$f(x) = \lim_n f(x_n) = \lim_n \int_0^1 x_n(t)\varphi(t)dt = \int_0^1 x(t)\varphi(t)dt$$

deci f se reprezintă sub forma (2.23).

Din (2.25) și din inegalitatea contrară stabilită mai înainte, rezultă (2.24).

Scanned with OKEN Scanner

2.3. CONJUGATUL UNUI SPAȚIU NORMAT ȘI TOPOLOGII SLABE

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar normat și $\mathfrak{X}^*$ conjugatul său (a se vedea Cap. II,2.6). În baza celor arătate în secțiunea 1.2, $\mathfrak{X}^*$ este un spațiu Banach în raport cu norma

$$||f|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} |f(x)|.$$

Conjugatul $\mathfrak{X}^{**}$ al spațiului Banach $\mathfrak{X}^*$ se numește *al doilea conjugat al lui* $\mathfrak{X}$ (sau bidualul lui $\mathfrak{X}$).

Să observăm acum, că pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, formula

$$F_x(f) = f(x) \qquad (f \in \mathfrak{X}^*) \tag{2.27}$$

definește o funcțională liniară și continuă pe $\mathfrak{X}^*$.

Într-adevăr, F_x este evident liniară și avem

$$|F_x(f)| \leqslant ||x||\ ||f||$$

de unde rezultă că F_x este continuă și $||F_x|| \leqslant ||x||$. Să considerăm acum o funcțională $f_0 \in \mathfrak{X}^*$ așa ca $||f_0|| = 1$ și $f_0(x) = ||x||$ (a se vedea teorema 2.1.2). Avem:

$$||F_x|| \geqslant |F_x(f_0)| = f_0(x) = ||x||.$$

În concluzie

$$||F_x|| = ||x||. \tag{2.28}$$

Vom nota

$$\mathfrak{X}_0^{**} = \{F_x | x \in \mathfrak{X}\}. \tag{2.29}$$

Teorema 2.3.1. *Orice spațiu liniar normat* $\mathfrak{X}$ *este izomorf cu un subspațiu al celui de-al doilea conjugat (prin aplicația* $x \to F_x$, *unde* F_x *este dată de* (2.27)).

Demonstrație. Să arătăm că $\mathfrak{X}$ este izomorf cu $\mathfrak{X}_0^{**}$ prin aplicația $x \to F_x$. Să observăm mai întîi că această aplicație este liniară, căci

$$F_{\alpha x_1 + \beta x_2}(f) = f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = \alpha F_{x_1}(f) + \beta F_{x_2}(f)$$

deci lui $\alpha x_1 + \beta x_2$ îi corespunde $\alpha F_{x_1} + \beta F_{x_2}$. Din

$$||F_{x'} - F_{x''}|| = ||x' - x''||$$

rezultă că aplicația $x \to F_x$ este biunivocă. Deoarece ea păstrează și norma, este un izomorfism între spațiile liniare normate $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{X}_0^{**}$.

Definiția 2.3.1. *Un spațiu liniar normat* $\mathfrak{X}$ *se zice că este reflexiv, dacă* $\mathfrak{X}^{**} = \mathfrak{X}_0^{**}$ (a se vedea 2.29 și 2.27).

În particular, un spațiu reflexiv este izomorf cu al doilea conjugat al său. Deci orice spațiu liniar normat care este reflexiv este un spațiu Banach.

Teorema 2.3.2. *Un spațiu Banach* $\mathfrak{X}$ *este reflexiv, dacă și numai dacă conjugatul său* $\mathfrak{X}^*$ *este un spațiu reflexiv.*

Demonstrație. Se verifică cu ușurință că dacă spațiul $\mathfrak{X}$ este reflexiv, atunci și $\mathfrak{X}^*$ este reflexiv. Reciproc, să presupunem că spațiul $\mathfrak{X}^*$ este reflexiv dar să presupunem că $\mathfrak{X}$ nu ar fi reflexiv. Să considerăm subspațiul $\mathfrak{X}_0^{**}$ al lui $\mathfrak{X}^{**}$ izomorf cu $\mathfrak{X}$ prin aplicația $x \to F_x$. Atunci $\mathfrak{X}_0^{**}$ este un subspațiu liniar închis al lui $\mathfrak{X}^{**}$ (deoarece $\mathfrak{X}$ și deci $\mathfrak{X}_0^{**}$ este complet). În baza teoremei 2.5.2 din Cap. II există o funcțională $\varphi \in (\mathfrak{X}^{**})^*$ nenulă

Scanned with OKEN Scanner

așa ca $\varphi(F_x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{X}$. Pe de altă parte, spațiul $\mathfrak{X}^*$ fiind reflexiv, există $f\in\mathfrak{X}^*$ așa ca $\varphi(F)=F(f)$, $\forall F\in\mathfrak{X}^{**}$. Cum $\varphi(F_x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{X}$, rezultă $F_x(f)=0$, $\forall x\in\mathfrak{X}$, deci $f(x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{X}$. Cu alte cuvinte $f=0$ de unde rezultă $\varphi=0$, ceea ce este contradictoriu.

Teorema 2.3.3. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar normat, atunci în spațiul $\mathfrak{X}^*$ sfera unitate închisă este slab compactă*[1].

Demonstrație. Aplicația $f\to\{f(x)\}_{x\in\mathfrak{X}}$ a lui $\mathfrak{X}^*$ în $\Gamma^{\mathfrak{X}}$ fiind o injecție, vom considera $\mathfrak{X}^*\subset\Gamma^{\mathfrak{X}}$. Să notăm

$$B=\{f\in\mathfrak{X}^*\,|\,\|f\|\leqslant 1\}.$$

Deoarece topologia $\sigma(\mathfrak{X}^*,\mathfrak{X})$ este urma pe $\mathfrak{X}^*$ a topologiei produs din $\Gamma^{\mathfrak{X}}$, pentru a arăta că B este slab închisă, va trebui să arătăm că B este închisă în $\Gamma^{\mathfrak{X}}$. Fie deci $f_0\in\Gamma^{\mathfrak{X}}$ așa ca $f_0\in\overline{B}$ (închiderea în $\Gamma^{\mathfrak{X}}$). Fie $x_1, x_2\in\mathfrak{X}$ și $\alpha, \beta\in\Gamma$ precum și un număr oarecare $\varepsilon>0$. Mulțimea[2]:

$$W=\{f\in\Gamma^{\mathfrak{X}}\,|\,|f(x_1)-f_0(x_1)|<\varepsilon;\ |f(x_2)-f_0(x_2)|<\varepsilon;\ |f(\alpha x_1+\beta x_2)-$$
$$-f_0(\alpha x_1+\beta x_2)|<\varepsilon\}$$

este o vecinătate a lui f_0 în spațiul $\Gamma^{\mathfrak{X}}$. Există deci $f_1\in W\cap B$ și avem

$$|f_0(\alpha x_1+\beta x_2)-\alpha f_0(x_1)-\beta f_0(x_2)|\leqslant|f_0(\alpha x_1+\beta x_2)-f_1(\alpha x_1+\beta x_2)|+|\alpha f_1(x_1)+$$
$$+\beta f_1(x_2)-\alpha f_0(x_1)-\beta f_0(x_2)|\leqslant|f_0(\alpha x_1+\beta x_2)-f_1(\alpha x_1+\beta x_2)|+|\alpha||f_1(x_1)-f_0(x_1)|+$$
$$+|\beta||f_1(x_2)-f_0(x_2)|\leqslant(1+|\alpha|+|\beta|)\varepsilon.$$

Deoarece ε a fost arbitrar, deducem că f_0 este liniară.
Pe de altă parte, dacă $x\in\mathfrak{X}$ și punem

$$V=\{f\in\Gamma^{\mathfrak{X}}\,|\,|f(x)-f_0(x)|<\varepsilon\}$$

obținem de asemenea o vecinătate a lui f_0 în $\Gamma^{\mathfrak{X}}$, deci există $f_1\in V\cap B$. Avem

$$|f_0(x)|\leqslant|f_0(x)-f_1(x)|+|f_1(x)|<\varepsilon+\|x\|$$

căci $\|f_1\|\leqslant 1$. Deoarece ε a fost arbitrar

$$|f_0(x)|\leqslant\|x\|$$

deci $f_0\in\mathfrak{X}^*$ și $\|f_0\|\leqslant 1$, adică $f_0\in B$.
Mulțimea B este deci slab închisă.
Să observăm acum că pentru orice $x\in\mathfrak{X}$, din

$$|f(x)|\leqslant\|x\|,\ (\forall f\in B)$$

rezultă că mulțimea

$$B(x)=\{f(x)|f\in B\}$$

este compactă în Γ. Din

$$B\subset\prod_{x\in\mathfrak{X}}B(x)$$

rezultă că B este compactă.

---

[1] Adică compactă în topologia $\sigma^*=\sigma(\mathfrak{X}^*,\mathfrak{X})$ (a se vedea Cap. II, 2.6). Teorema 2.3.3 este cunoscută sub denumirea de teorema lui Alaoglu.

[2] Dacă $f\in\Gamma^{\mathfrak{X}}$ și anume $f=\{\lambda_x\}_{x\in\mathfrak{X}}$ vom nota $f(x)=\lambda_x$.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 2.3.1. *Dacă un spațiu liniar normat $\mathfrak{X}$ este reflexiv, atunci sfera unitate închisă a spațiului $\mathfrak{X}$ este slab compactă*[1].

Într-adevăr, dacă $\mathfrak{X}$ este reflexiv, atunci putem identifica $\mathfrak{X}$ cu $\mathfrak{X}^{**}$ și atunci sfera unitate închisă S a lui $\mathfrak{X}$ se va identifica cu sfera unitate închisă a lui $\mathfrak{X}^{**}$. În baza teoremei 2.3.3 mulțimea S este compactă în topologia[2] $\sigma(\mathfrak{X}^{**}, \mathfrak{X}^{*})=\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^{*})$.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar normat, și dacă un șir $\{f_n\}_{n\in N}$ de elemente ale lui $\mathfrak{X}^*$ converge în topologia $\sigma^*=\sigma(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{X})$ către un element $f\in\mathfrak{X}^*$, vom nota $f=(\sigma^*)\text{-}\lim_n f_n$.

Cu definiția topologiei σ^*, convergența în această topologie (numită convergența slabă) înseamnă convergența punctuală: $f(x)=\lim_n f_n(x)$, $\forall x\in\mathfrak{X}$.

Teorema 2.3.4. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Banach și f_n, $f\in\mathfrak{X}^*$, $(n\in\mathbf{N})$. Pentru ca $f=(\sigma^*)\text{-}\lim_n f_n$ este necesar și suficient ca următoarele două condiții să fie îndeplinite:*

i) *Șirul $\{\|f_n\|\}_{n\in N}$ este mărginit;*

ii) *există o submulțime $A\subset\mathfrak{X}$ cu $\overline{\mathrm{Sp}}(A)=\mathfrak{X}$ astfel ca*

$$f(x)=\lim_n f_n(x),\quad \forall x\in A.$$

Demonstrație. Necesitatea primei condiții rezultă din Corolarul 1.3.1 iar necesitatea condiției (ii) este banală.

Reciproc, să presupunem că (i) și (ii) sînt îndeplinite.

Fie $\lambda\in\mathbf{R}$ așa ca $\|f_n\|\leqslant\lambda$ și $\|f\|\leqslant\lambda$. Să considerăm un element $x\in\mathfrak{X}$ și un număr oarecare $\varepsilon>0$. Fie $x'\in\mathrm{Sp}(A)$ așa ca

$$\|x'-x\|<\frac{\varepsilon}{4\lambda}.$$

Din condiția (ii) rezultă $\lim_n f_n(x')=f(x')$, deci există $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ așa ca

$$|f_n(x')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2},\quad (n>n_\varepsilon).$$

Avem deci pentru $n>n_\varepsilon$

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_n(x')|+|f_n(x')-f(x')|+|f(x')-f(x)|\leqslant$$

$$\leqslant(\|f_n\|+\|f\|)\|x'-x\|+|f_n(x')-f(x')|<2\lambda\cdot\frac{\varepsilon}{4\lambda}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

adică $f(x)=\lim_n f_n(x)$. Cum x a fost arbitrar $f=(\sigma^*)\text{-}\lim_n f_n$ și teorema este demonstrată.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar normat, și dacă un șir $\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente ale lui $\mathfrak{X}$ converge în topologia $\sigma=\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ către un element

---

[1] Adică compactă în topologia $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^*)$ (a se vedea Cap. II, 2.6). Se poate demonstra și reciproca: Dacă într-un spațiu liniar normat $\mathfrak{X}$, sfera unitate închisă este slab compactă, atunci $\mathfrak{X}$ este reflexiv.

[2] Notînd $\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}^*$, putem considera pe $\mathfrak{Y}^*$, topologia $\sigma(\mathfrak{Y}^*, \mathfrak{Y})$.

Scanned with OKEN Scanner

$x \in \mathfrak{X}$, vom nota $x = (\sigma)\text{-}\lim_n x_n$. Cu definiția topologiei σ (numită convergența slabă[1]), egalitatea $x = (\sigma)\text{-}\lim_n x_n$, înseamnă $f(x) = \lim_n f(x_n)$, $\forall f \in \mathfrak{X}^*$.

Corolar 2.3.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar normat și x_n, $x \in \mathfrak{X}$, $(n \in \mathbf{N})$. Pentru ca $x = (\sigma)\text{-}\lim_n x_n$ este necesar și suficient ca:*

(i) *șirul $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbf{N}}$ este mărginit.*

(ii) *există o submulțime $\mathscr{F} \subset \mathfrak{X}^*$ cu $\overline{\mathrm{Sp}}(F) = \mathfrak{X}^*$ astfel încît $f(x) = \lim_n f(x_n)$, $\forall f \in \mathscr{F}$.*

Într-adevăr, dacă considerăm funcționalele F_n, F pe $\mathfrak{X}^*$ definite prin formulele

$$F_n(f) = f(x_n), \qquad (f \in \mathfrak{X}^*)$$
$$F(f) = f(x), \qquad (f \in \mathfrak{X}^*)$$

atunci F_n, $F \in \mathfrak{X}^{**}$, $\|F_n\| = \|x_n\|$ iar $x = (\sigma)\text{-}\lim_n x_n$ dacă și numai dacă șirul $\{F_n\}_{n \in N}$ converge către F în topologia $\sigma(\mathfrak{X}^{**}, \mathfrak{X}^*)$.

Observație. Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathscr{Y}$ spații liniare normate iar $U: \mathfrak{X} \to \mathscr{Y}$ un operator liniar și continuu. Atunci din $x = (\sigma)\text{-}\lim_n x_n$ rezultă $U(x) = (\sigma)\text{-}\lim_n U(x_n)$.

Exerciții. (1). Fie $\mathfrak{X} = \mathbf{L}^2([0, 1])$ și să considerăm șirul de elemente $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ cu $x_n(t) = \sin n\pi t$. Să se arate că șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge slab către $\mathbf{0}$ dar nu converge în normă către $\mathbf{0}$.

(2). Să se arate că dacă $\{x_n\}_{n \in N}$ este un șir de elemente ale unui spațiu liniar normat $\mathfrak{X}$ care converge slab către un element x, atunci există un șir $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de combinații liniare de elementele șirului $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ care converge în normă către x.

(3). Să se arate că dacă $1 < p \in \mathbf{R}$ iar $1/p + 1/q = 1$, atunci conjugatul spațiului $\mathbf{L}^p(T)$ este izomorf cu $\mathbf{L}^q(T)$ iar conjugatul spațiului $(\mathbf{l}^p)$ este izomorf cu $(\mathbf{l}^q)$.

(4) Să se arate că dacă $1 < p \in \mathbf{R}$ atunci spațiile $(\mathbf{l}^p)$, $\mathbf{L}^p(T)$ sînt reflexive.

(5). Să se arate că spațiul $\mathbf{C}(T)$ (cu norma obișnuită) nu este reflexiv.

2.4. APLICAȚII LA SPAȚII CONCRETE

Vom considera spațiile Banach reale[2] $\mathbf{C}(T)$, $\mathbf{L}^p(T)$, $(\mathbf{l}^p)$.

1. Prin *problema momentelor* se înțelege problema găsirii unei funcții $\varphi: [0, 1] \to \mathbf{R}$ cu variație mărginită[3] verificînd egalitățile[4]:

$$\int_0^1 t^k \mathrm{d}\varphi(t) = \lambda_k, \quad (k \in \mathbf{N}_0) \tag{2.30}$$

unde șirul de numere $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbf{N}_0}$ este dat.

---

[1] A se vedea Cap. II, 2.6.

[2] Pentru simplificare notăm $\mathbf{C}(T)$ în loc de $\mathbf{C}_{\mathbf{R}}(T)$ și analog $\mathbf{L}^p(T)$, $(\mathbf{l}^p)$.

[3] Segmentul $[0, 1]$ poate fi înlocuit cu un segment oarecare.

[4] Notăm $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate de asemenea pune problema găsirii unei funcții q-integrabile φ: $[0, 1]\to\mathbf{R}$ cu $q>1$ așa ca

$$\int_0^1 t^k\varphi(t)\mathrm{d}t=\lambda_k,\ (k\in\mathbf{N}_0). \tag{2.31}$$

Mai general (2.30) se poate înlocui cu

$$\int_0^1 x_k(t)\mathrm{d}\varphi(t)=\lambda_k,\ (k\in\mathbf{N}_0) \tag{2.32}$$

unde s-a dat șirul de funcții continue $\{x_k\}_{k\in N_0}$ iar (2.31) prin

$$\int_0^1 x_k(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\lambda_k,\ (k\in\mathbf{N}_0) \tag{2.33}$$

unde s-a dat șirul de funcții p-integrabile $\{x_k\}_{k\in N_0}$ (cu $1/p+1/q=1$).

Problema găsirii funcției φ care verifică (2.32) se poate pune ca problema găsirii funcționalei liniare și continue f pe spațiul Banach $\mathbf{C}([0, 1])$ (cu norma obișnuită) care verifică egalitățile

$$f(x_k)=\lambda_k,\ (k\in\mathbf{N}_0). \tag{2.34}$$

Cu teorema 2.1.3 deducem că pentru existența funcției φ este necesar și suficient să existe un număr $\mu>0$ așa ca

$$\left|\sum_{i=0}^n \alpha_i\lambda_i\right|\leqslant\mu\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i(t)\right| \tag{2.35}$$

oricare ar fi numerele α_i și $n\in\mathbf{N}_0$.

Problema găsirii funcției q-integrabile φ care verifică (2.33) este problema găsirii unei funcționale liniare și continue f pe spațiul Banach $\mathbf{L}^p([0, 1])$ (cu $1/p+1/q=1$) care verifică (2.34). În acest caz, condiția (2.35) se înlocuiește cu

$$\left|\sum_{i=0}^n \alpha_i\lambda_i\right|\leqslant\mu\left(\int_0^1\left|\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i(t)\right|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},$$

2. Să considerăm spațiul Banach $(\mathbf{l}^p)$, cu $p>1$.

Fie $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}\in(\mathbf{l}^p)$, $(n\in\mathbf{N})$ și anume $\mathbf{x}_n=\{\xi_{nj}\}_{j\in\mathbf{N}}$ și $\mathbf{x}=\{\xi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$.

Pentru ca $\mathbf{x}=(\sigma)\text{-}\lim_n \mathbf{x}_n$ în $(\mathbf{l}^p)$ este necesar și suficient ca următoarele condiții să fie satisfăcute:

(i) există un număr $\lambda>0$ așa ca

$$\sum_{j=1}^\infty|\xi_{nj}|^p\leqslant\lambda,\ (\forall n\in\mathbf{N})$$

(ii) $\lim_n \xi_{nj}=\xi_j$, $(\forall j\in\mathbf{N})$.

Într-adevăr, să punem

$$f_j=\{\delta_{jn}\}_{n\in\mathbf{N}},\ (j\in\mathbf{N})$$

unde δ_{jn} este simbolul lui Kronecker. În spațiul $(\mathbf{l}^q)$, subspațiul liniar generat de $\{f_j|j\in\mathbf{N}\}$ este dens. Deoarece $(\mathbf{l}^q)$ se poate identifica cu conjugatul lui $(\mathbf{l}^p)$, în baza corolarului 2.3.2 pentru ca $\mathbf{x}=(\sigma)\text{-}\lim_n \mathbf{x}_n$ este necesar și suficient

Scanned with OKEN Scanner

ca şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ să fie mărginit, adică să aibă loc (i) precum şi $\lim_n f_j(x_n) = f_j(x)$, $(j\in\mathbf{N})$. Nu rămîne decît să observăm că în baza teoremei 2.2.3 avem $f_j(x_n)=\xi_{nj}$ şi $f_j(x)=\xi_j$.

Să considerăm acum spaţiul Banach $\mathbf{L}^p([0, 1])$ cu $p>1$.

Pentru ca $x=(\sigma)\text{-}\lim_n x_n$ în $\mathbf{L}^p([0, 1])$ este necesar şi suficient ca următoarele condiţii să fie satisfăcute:

(a) există un număr $\lambda>0$ aşa ca

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p dt \leqslant \lambda, \quad (\forall n\in\mathbf{N});$$

(b) $\lim_n \int_0^t x_n(s)ds = \int_0^t x(s)ds, \quad \forall t\in[0, 1].$

Într-adevăr, trebuie să examinăm numai condiţia (b).

Fie

$$y_t(s)=\begin{cases} 1 \text{ dacă } 0\leqslant s\leqslant t \\ 0 \text{ dacă } t<s\leqslant 1. \end{cases}$$

Dacă se consideră o diviziune D a intervalului $[0, 1]$

$$0<t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=1$$

să punem

$$z_D(s)=\sum_{i=1}^n \lambda_i(y_{t_i}(s)-y_{t_{i-1}}(s)).$$

Se observă că în spaţiul $\mathbf{L}^q([0, 1])$ $(1/p+1/q=1)$, mulţimea tuturor elementelor[1] z_D formează o mulţime densă. Deoarece $\mathbf{L}^q([0, 1])$ se poate identifica cu conjugatul lui $\mathbf{L}^p([0, 1])$, în baza corolarului 2.3.2 şi a teoremei 2.2.6 pentru ca $x=(\sigma)\text{-}\lim_n x_n$ este necesar şi suficient să fie îndeplinită condiţia (a) precum şi condiţia

$$\lim_n \int_0^1 x_n(s)y_t(s)ds = \int_0^1 x(s)y_t(s)ds, \quad (\forall t\in[0, 1])$$

adică condiţia (b).

§ 3. OPERATORI COMPACŢI

3.1. DEFINIŢIA ŞI PROPRIETĂŢILE OPERATORILOR COMPACŢI

Fie $\mathfrak{X}$ şi $\mathcal{Y}$ spaţii liniare normate.

Definiţia 3.1.1. *Un operator liniar $U: \mathfrak{X}\to\mathcal{Y}$ se numeşte compact (sau complet continuu), dacă pentru orice mulţime mărginită $A\subset\mathfrak{X}$, mulţimea $U(A)$ este relativ compactă în $\mathcal{Y}$.*

[1] Adică a claselor reprezentate de funcţiile z_D.

Dacă un operator liniar U este compact, atunci el este și continuu.

Într-adevăr, dacă S este sfera unitate închisă în $\mathfrak{X}$, atunci $U(S)$ este mărginită și cu teorema 1.1.1 operatorul U este continuu.

Vom nota cu $\mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ mulțimea operatorilor liniari compacți care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$.

Teorema 3.1.1. *Dacă $U \in \mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ iar $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir de elemente din $\mathfrak{X}$ care converge slab către x, atunci $\{U(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge în normă către $U(x)$.*

Demonstrație. Să notăm $y_n = U(x_n)$ și $y = U(x)$. Să presupunem că șirul $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ nu converge în normă către y. Există atunci un număr $\varepsilon_0 > 0$ și un șir crescător $\{k_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de numere naturale așa ca

$$\|y_{k_n} - y\| \geqslant \varepsilon_0, \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{3.1}$$

Pe de altă parte, șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ fiind slab convergent este mărginit (corolarul 2.3.2). Deci și subșirul $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ este mărginit. Dar atunci $\{y_{k_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ este relativ compact, deci conține un subșir $\{y_{j_{k_n}}\}_{n\in\mathbf{N}}$ care converge în normă și deci și slab către un element y'. Deci $y' = (\sigma)\text{-}\lim_n U(x_{j_{k_n}})$. Cum însă $x = (\sigma)\text{-}\lim_n x_{j_{k_n}}$ rezultă $y = U(x) = (\sigma)\text{-}\lim_n U(x_{j_{k_n}})$.

Rezultă $y' = y$, adică $y = \lim_n y_{j_{k_n}}$ (în normă) ceea ce este în contradicție cu (3.1).]

Teorema 3.1.2. *Mulțimea $\mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ este un subspațiu liniar al spațiului $\mathscr{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.*

Demonstrație. Incluziunea $\mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \subset \mathscr{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ a fost remarcată mai înainte. Fie acum $U_1, U_2 \in \mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ și $\alpha, \beta \in \Gamma$. Să notăm $U = \alpha U_1 + \beta U_2$. Fie A o submulțime mărginită a lui $\mathfrak{X}$ și $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de elemente din $U(A)$. Fie $x_n \in A$ așa ca $y_n = U(x_n)$ și să notăm $y'_n = U_1(x_n)$, $y''_n = U_2(x_n)$. Operatorul U_1 fiind compact, șirul $\{y'_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ conține un subșir convergent $\{y'_{j_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$; operatorul U_2 fiind compact, șirul $\{y''_{j_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ conține un subșir convergent $\{y''_{j_{k_n}}\}_{n\in\mathbf{N}}$. Deoarece:

$$y_{j_{k_n}} = \alpha y'_{j_{k_n}} + \beta y''_{j_{k_n}}$$

șirul $\{y_{j_{k_n}}\}_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent. Mulțimea $U(A)$ este deci relativ compactă și în concluzie $U \in \mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Teorema 3.1.3. *Dacă $\mathfrak{Y}$ este un spațiu Banach, atunci $\mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ este un subspațiu liniar închis al spațiului $\mathscr{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.*

Demonstrație. Fie $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de elemente din $\mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ și $U \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ astfel ca $U = \lim_n U_n$. Să arătăm că $U \in \mathscr{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir mărginit de elemente din $\mathfrak{X}$, atunci $\{U(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ conține un subșir convergent.

Să considerăm deci șirul mărginit $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Există un subșir $\{x_{1n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ al șirului $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ așa ca $\{U_1(x_{1n})\}_{n\in\mathbf{N}}$ să fie convergent. Din $\{x_{1n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ se

Scanned with OKEN Scanner

poate extrage un subșir $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ așa ca $\{U_2(x_{2n})\}_{n\in\mathbf{N}}$ să fie convergent. Continuînd procedeul și notînd $v_j=x_{jj}$, șirul $\{U_n(v_j)\}_{j\in\mathbf{N}}$ este convergent, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

Avem apoi

$$\|U(v_i)-U(v_j)\|\leqslant\|U(v_i)-U_n(v_i)\|+\|U_n(v_i)-U_n(v_j)\|+\|U_n(v_j)-$$
$$-U(v_j)\|\leqslant\|U-U_n\|(\|v_i\|+\|v_j\|)+\|U_n(v_i)-U_n(v_j)\|.$$

Șirul $\{v_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ fiind mărginit există $\lambda>0$ așa ca $\|v_i\|\leqslant\lambda$, deci

$$\|U(v_i)-U(v_j)\|\leqslant 2\lambda\|U-U_n\|+\|U_n(v_i)-U_n(v_j)\| \tag{3.2}$$

Deoarece $U=\lim\limits_n U_n$, pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ așa ca

$$\|U-U_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{4\lambda}. \tag{3.3}$$

Pe de altă parte, șirul $\{U_{n_0}(v_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ fiind convergent, este un șir Cauchy, deci există $m_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ așa ca

$$\|U_{n_0}(v_i)-U_{n_0}(v_j)\|<\frac{\varepsilon}{2},\ (i,\ j\geqslant m_0(\varepsilon)). \tag{3.4}$$

Dacă în (3.2) înlocuim n cu n_0 și ținem seama de (3.3) și (3.4) obținem

$$\|U(v_i)-U(v_j)\|<\varepsilon,\ (i,\ j\geqslant m_0(\varepsilon))$$

deci $\{U(v_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy. Spațiul $\mathcal{Y}$ fiind complet, există $\lim\limits_i U(v_i)$, deci U este compact.

Teorema este demonstrată.

Vom nota cu $\mathcal{H}(\mathfrak{X})$ mulțimea operatorilor liniari compacți care aplică spațiul liniar normat $\mathfrak{X}$ în el însuși.

Exercițiu. Să se arate că dacă $U\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ iar $V\in\mathcal{H}(\mathfrak{X})$ atunci UV, $VU\in\mathcal{H}(\mathfrak{X})$.

3.2. EXEMPLE DE OPERATORI COMPACȚI

Spațiile considerate vor fi spații Banach reale.

3.2.1. *Operatorul matricial.* Să considerăm spațiul $(l^2)=(l^2_{\mathbf{R}})$ și operatorul matricial U: $(l^2)\to(l^2)$ definit prin

$$\mathbf{y}=U(\mathbf{x})\Leftrightarrow\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j,\ (i\in\mathbf{N}) \tag{3.5}$$

(unde $\mathbf{y}=\{\eta_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, $\mathbf{x}=\{\xi_j\}_{j\in\mathbf{N}}$) cu condiția ca seria dublă $\sum\limits_i\sum\limits_j\alpha_{ij}^2$ să fie convergentă (a se vedea secțiunea 1.1).

Acest operator este compact.

Într-adevăr, pentru orice $n\in\mathbf{N}$ să considerăm operatorul U_n: $(l^2)\to(l^2)$ definit prin

$$U_n(\mathbf{x})=\{\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n,\ 0,\ 0,\ \ldots\},\ (x\in(l^2))$$

Scanned with OKEN Scanner

unde numerele η_i sînt date de (3.5). Operatorul U_n este compact, deoarece dacă A este o submulțime mărginită a lui (l^2), atunci $U_n(A)$ este o mulțime mărginită dintr-un subspațiu liniar normat n-dimensional, deci o mulțime relativ compactă. Pe de altă parte

$$||U_n - U|| \leqslant \Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

de unde rezultă $\lim_n ||U_n - U|| = 0$. Cu teorema 3.1.3 operatorul U este compact.

3.2.2. *Operatorul integral* (1). Să notăm $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}[(0, 1)]$ și $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\mathbf{R}}([0,1])$. Fie φ o funcție reală continuă pe $[0, 1] \times [0, 1]$. Dacă $x \in \mathbf{L}^2$, atunci funcția

$$y(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)x(t)\mathrm{d}t, \quad (s \in [0, 1])$$

este continuă, căci

$$|y(s_1) - y(s_2)| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(s_1, t) - \varphi(s_2, t)| \int_0^1 |x(t)|\mathrm{d}t. \tag{3.6}$$

Să considerăm operatorul U: $\mathbf{L}^2 \to \mathbf{C}$ definit prin

$$y = U(x) \Leftrightarrow y(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)x(t)\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

Acest operator este evident liniar[1]. Să arătăm că este compact. Pentru aceasta să observăm mai întîi că dacă notăm

$$\mu = \max_{s, t \in [0,1]} |\varphi(s, t)|$$

atunci din inegalitățile lui Hölder rezultă

$$\Big|\int_0^1 \varphi(s, t)x(t)\mathrm{d}t\Big| \leqslant \mu||x||.$$

Deci dacă $E \subset \mathbf{L}^2$ și $||x|| \leqslant \lambda$, $\forall x \in E$, atunci $|y(s)| \leqslant \mu\lambda$ dacă $y \in U(E)$. Deci $U(E)$ este o mulțime de funcții reale egal mărginite precum și egal continue (în baza lui (3.6)). În baza propoziției 3.2.2 din Cap. III mulțimea $U(E)$ este relativ compactă, în spațiul $\mathbf{C}$, deci U este un operator compact.

(2) Se poate observa că dacă prin (3.7) se consideră operatorul U: $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, atunci acest operator liniar este de asemenea compact.

(3) Dacă prin (3.7) se consideră operatorul U: $\mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}^2$ atunci acest operator liniar este de asemenea compact.

Într-adevăr, este suficient să observăm că un șir uniform convergent de funcții continue, converge și în medie pătratică.

(4) Să considerăm acum o funcție reală φ pe $[0, 1] \times [0, 1]$ care să fie de pătrat integrabil. Fie atunci $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ un șir de funcții reale continue pe $[0, 1] \times [0, 1]$ care converge în medie pătratică către funcția φ:

$$\lim_n \int_0^1\int_0^1 |\varphi_n(s, t) - \varphi(s, t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0.$$

[1] El se numește operator integral. În secțiunea 1.1 am considerat operatori integrali care aplică $\mathbf{C}$ în $\mathbf{C}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm operatorul integral U_n: $\mathbf{L}^2 \to \mathbf{L}^2$ definit prin

$$y = U_n(x) \Leftrightarrow y(s) = \int_0^1 \varphi_n(s, t)x(t)\mathrm{d}t.$$

Au loc relaţiile

$$||U_n(x) - U(x)||^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 (\varphi_n(s, t) - \varphi(s, t))x(t)\mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left\{ \int_0^1 |\varphi_n(s, t) - \varphi(s, t)|^2 \mathrm{d}t \cdot \int_0^1 |x(t)|^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{d}s =$$

$$= \left(\int_0^1 \int_0^1 |\varphi_n(s, t) - \varphi(s, t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right) ||x||^2$$

de unde rezultă

$$||U_n - U|| \leqslant \left(\int_0^1 \int_0^1 |\varphi_n(s, t) - \varphi(s, t)|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

Deci şirul $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniform către U. Operatorii U_n fiind compacţi, în baza teoremei 3.1.3, operatorul U este compact.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

SPAȚII LINIARE ORDONATE ȘI OPERATORI REGULAȚI[1]

În diferite spații liniare concrete considerate în aplicații, un rol important îl joacă relația de ordine.

Spațiile liniare înzestrate cu o relație de ordine legată în mod natural cu operațiile liniare au fost considerate prima oară de F. Riesz în 1928. Teoria spațiilor liniare ordonate a început însă să se dezvolte de la lucrările lui L. V. Kantorovici și H. Freudenthal din 1935—1936.

§ 1. SPAȚII LINIARE ORDONATE

În acest paragraf vom introduce noțiunea generală de spațiu liniar ordonat și cazul particular de spațiu reticulat.

1.1. NOȚIUNEA DE SPAȚIU LINIAR ORDONAT

Definiția 1.1.1. *Se numește spațiu liniar ordonat un spațiu liniar real* $\mathfrak{X}$ *care este în același timp o mulțime ordonată astfel încît să fie satisfăcute următoarele condiții:*

I. *dacă* $x \leqslant y$, $(x, y \in \mathfrak{X})$, *atunci* $v+x \leqslant v+y$, *oricare ar fi* $v \in \mathfrak{X}$;

II. *dacă* $x \leqslant y$, $(x, y \in \mathfrak{X})$, *iar* $\alpha \geqslant 0$ (α *real*), *atunci* $\alpha x \leqslant \alpha y$.

Un element $x \geqslant \mathbf{0}$ *se zice pozitiv, iar un element* $x \leqslant \mathbf{0}$ *se zice negativ.*

Se verifică imediat propozițiile:

1°) relația $x \leqslant y$ este echivalentă cu $y - x \geqslant \mathbf{0}$;

2°) dacă $x \geqslant \mathbf{0}$ și $y \geqslant \mathbf{0}$, atunci $x+y \geqslant \mathbf{0}$;

3°) dacă $x \geqslant \mathbf{0}$ și $\alpha \geqslant 0$, (α real) atunci $\alpha x \geqslant \mathbf{0}$;

4°) dacă $x \leqslant y$ și $x' \leqslant y'$ atunci $x+x' \leqslant y+y'$;

5°) dacă $x \leqslant y$ și $\alpha \leqslant 0$ (α real), atunci $\alpha x \geqslant \alpha y$;

[1] Pentru o mai amplă informare în acest domeniu se poate consulta R. Cristescu, *Spații liniare ordonate și operatori liniari*. Editura Academiei R.S.R., 1970.

Scanned with OKEN Scanner

6°) dacă $\alpha \leqslant \beta$ (α, β reale) și $x \geqslant \mathbf{0}$, atunci $\alpha x \leqslant \beta x$,

Precum și acelea care se deduc din acestea prin înlocuirea tuturor inegalităților prin inegalități stricte.

Exemple. Următoarele spații liniare sînt spații liniare ordonate pentru operațiile liniare obișnuite și ordinea indicată de fiecare dată:

(1) Spațiul $\mathbf{R}^n$ în care pentru $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \xi_k \leqslant \eta_k, \ (k=1, 2, \ldots, n).$$

(2) Spațiul (s) al tuturor șirurilor de numere reale în care pentru $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ și $y=\{\eta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \xi_n \leqslant \eta_n, \ (n \in \mathbf{N}).$$

(3) Spațiul ($\mathbf{l}^p$), ($p \geqslant 1$), cu aceeași ordine ca în (s);

(4) Spațiul $\mathbf{F}(T)$ al tuturor funcțiilor reale definite pe o mulțime T cu

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t), \ (t \in T).$$

(5) Spațiul $\mathbf{B}(T)$ al tuturor funcțiilor reale definite pe T și care sînt mărginite, cu aceeași ordine ca în $\mathbf{F}(T)$;

(6) Spațiul $\mathbf{C}(T)$, cu aceeași ordine ca în $\mathbf{F}(T)$;

(7) Spațiul $\mathbf{D}(T)$ al funcțiilor derivabile pe un interval T, cu aceeași ordine ca în $\mathbf{F}(T)$.

(8) Spațiul $\mathbf{S}(T)$ al tuturor claselor de funcții reale măsurabile (L) pe un segment T, față de relația de echivalență:

$$x \sim y \Leftrightarrow x(t)=y(t) \text{ a.p.t.}$$

cu operațiile liniare obișnuite între clase și cu ordinea

$$\hat{x} \leqslant \hat{y} \Leftrightarrow x(t) \leqslant y(t) \text{ a.p.t.}$$

(9) Spațiul $\mathbf{L}^p(T)$, ($p \geqslant 1$) cu aceeași ordine ca în $\mathbf{S}(T)$.

(10) Spațiul $\mathbf{V}(T)$ al funcțiilor cu variație mărginită pe segmentul $T=[\alpha, \beta]$ cu operațiile liniare ca în $\mathbf{F}(T)$, dar definind $x \leqslant y$ prin condițiile

(i) $x(\alpha) \leqslant y(\alpha)$;

(ii) $x(t+\theta)-x(t) \leqslant y(t+\theta)-y(t)$ pentru $\theta > 0$.

Următoarele trei propoziții au loc în orice spațiu liniar ordonat.

Propoziția 1.1.1. *Dacă există unul dintre elementele* $\bigwedge_{h\in H} x_h$ *și* $\bigvee_{h\in H}(-x_h)$, *atunci există și celălalt și are loc egalitatea*

$$\bigwedge_{h\in H} x_h = -\bigvee_{h\in H}(-x_h).$$

Demonstrație. Fie $y=\bigwedge_{h\in H} x_h$. Din $y \leqslant x_h$, rezultă $-y \geqslant -x_h$, deci $-y$ este un majorant pentru mulțimea $\{-x_h \mid h \in H\}$. Dacă $v \geqslant -x_h$ pentru orice $h \in H$, atunci $-v \leqslant x_h$ oricare ar fi $h \in H$, deci $-v \leqslant y$, de unde $v \geqslant -y$, adică

$$-y=\bigvee_{h\in H}(-x_h).$$

La fel se arată că, dacă există $z=\bigvee_{h\in H}(-x_h)$, atunci

$$-z=\bigwedge_{h\in H} x_h.$$

Propoziția 1.1.2. *Dacă există* $\bigvee_{h\in H} x_h$ *și* $\bigvee_{j\in J} y_j$, *atunci există și* $\bigvee_{h,\,j}(x_h+y_j)$ *și are loc egalitatea*

$$\bigvee_{\substack{h\in H\\ j\in J}}(x_h+y_j)=\left(\bigvee_{h\in H} x_h\right)+\left(\bigvee_{j\in J} y_j\right).$$

O propoziție analogă are de asemenea loc cînd înlocuim semnul $\bigvee$ prin semnul $\bigwedge$.

Demonstrație. Fie

$$x=\bigvee_{h\in H} x_h,\quad y=\bigvee_{j\in J} y_j.$$

Din $x_h\leqslant x$ și $y_j\leqslant y$ rezultă $x_h+y_j\leqslant x+y$.

Să considerăm acum un element z așa ca $x_h+y_j\leqslant z$ oricare ar fi $h\in H$, $j\in J$. Pentru un indice fix oarecare j avem atunci $x_h\leqslant z-y_j$, de unde $x\leqslant z-y_j$ oricare ar fi j. Avem astfel $y_j\leqslant z-x$ pentru orice $j\in J$, de unde $y\leqslant z-x$. Rezultă deci

$$x+y=\bigvee_{h,\,j}(x_h+y_j).$$

Propoziția 1.1.3. *Dacă există* $\bigvee_{h\in H} x_h$, *atunci pentru orice număr* $\alpha>0$ *există și* $\bigvee_{h\in H}(\alpha x_h)$ *și are loc egalitatea*

$$\bigvee_{h\in H}(\alpha x_h)=\alpha\bigvee_{h\in H} x_h.$$

O propoziție analogă are loc pentru marginea inferioară.

Demonstrație. Fie $y=\bigvee_{h\in H} x_h$ și $\alpha>0$. Din $x_h\leqslant y$ rezultă $\alpha x_h\leqslant \alpha y$, deci αy este un majorant al mulțimii $\{\alpha x_h \mid h\in H\}$. Să considerăm acum un element z așa ca $\alpha x_h\leqslant z$ oricare ar fi $h\in H$. Rezultă $x_h\leqslant \frac{1}{\alpha}z$ oricare ar fi h, de unde $y\leqslant \frac{1}{\alpha}z$ sau $\alpha y\leqslant z$. Deci

$$\alpha y=\bigvee_{h\in H}(\alpha x_h).$$

Exercițiu. Dacă există $\bigvee_{h\in H} x_h$, iar $\alpha<0$, atunci există și $\bigwedge_{h\in H}(\alpha x_h)$ și are loc egalitatea

$$\bigwedge_{h\in H}(\alpha x_h)=\alpha\bigvee_{h\in H} x_h.$$

O propoziție analogă are loc schimbînd între ele semnele $\bigvee$ și $\bigwedge$.

1.2. SPAȚII LINIARE RETICULATE

Definiția 1.2.1. *Se numește spațiu liniar reticulat un spațiu liniar ordonat care este o latice.*

Exemple. (1) Spațiul $\mathbf{D}(T)$ nu este un spațiu liniar reticulat.

(2) Spațiile din exemplele secțiunii precedente, cu excepția lui $\mathbf{D}(T)$, sînt spațiile liniare reticulate.

Observație. Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar reticulat, atunci pentru orice elemente x, y, z ale lui $\mathfrak{X}$ și orice număr $\alpha>0$ au loc următoarele egalități:

$$x \wedge y = -((-x) \vee (-y)) \tag{1.1}$$

$$x \vee y = -((-x) \wedge (-y)) \tag{1.2}$$

$$x+(y \vee z) = (x+y) \vee (x+z) \tag{1.3}$$

$$x+(y \wedge z) = (x+y) \wedge (x+z) \tag{1.4}$$

$$\alpha(x \vee y) = \alpha x \vee \alpha y \tag{1.5}$$

$$\alpha(x \wedge y) = \alpha x \wedge \alpha y \tag{1.6}$$

$$x+y = (x \vee y)+(x \wedge y) \tag{1.7}$$

Într-adevăr, (1.1) și (1.2) rezultă din propoziția 1.1.1; (1.3) și (1.4) rezultă din propoziția 1.1.2; (1.5) și (1.6) rezultă din propoziția 1.1.3. În sfîrșit (1.7) rezultă cu (1.2) și (1.4) în modul următor:

$$x-(x \vee y) = x+((-x) \wedge (-y)) = \mathbf{0} \wedge (x-y) = (y \wedge x)-y.$$

Teorema 1.2.1. *Într-un spațiu liniar reticulat au loc egalitățile:*

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \tag{1.8}$$

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \tag{1.9}$$

pentru orice elemente x, y, z.

Demonstrație. Din $x, y \leqslant x \vee y$ rezultă $x \wedge z \leqslant (x \vee y) \wedge z$; $y \wedge z \leqslant (x \vee y) \wedge z$. Dacă $v \geqslant x \wedge z$, $y \wedge z$, atunci cu (1.7)

$$x+z-(x \vee z) \leqslant v,$$

$$y+z-(y \vee z) \leqslant v$$

sau

$$x \leqslant v-z+(x \vee z),$$

$$y \leqslant v-z+(y \vee z),$$

de unde, folosind egalitatea (1.3),

$$x \vee y \leqslant (v-z)+(x \vee z) \vee (y \vee z) = (v-z)+(x \vee y) \vee z$$

sau

$$(x \vee y)+z-(x \vee y) \vee z \leqslant v.$$

Dar

$$(x \vee y)+z = (x \vee y) \vee z+(x \vee y) \wedge z,$$

astfel că

$$(x \vee y) \wedge z \leqslant v.$$

Are deci loc egalitatea (1.8). Egalitatea (1.9) se stabilește într-un mod analog.

Teorema 1.2.2. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar reticulat $x \in \mathfrak{X}$ și*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $x_i \geqslant 0$, $y_j \geqslant 0$. În acest caz există în $\mathfrak{X}$ elementele pozitive z_{ij} așa ca

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = y_j, \quad \sum_{j=1}^{m} z_{ij} = x_i.$$

Demonstrație. Să considerăm mai întîi cazul $m=2$, deci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = y_1 + y_2.$$

În acest caz vom demonstra propoziția prin inducție relativ la n.

Dacă $n=1$, adică $x=y_1+y_2$, vom lua $z_{11}=y_1$ și $z_{12}=y_2$.

Să presupunem acum propoziția adevărată pentru n. Fie atunci $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = y_1+y_2$ și să notăm

$$z_{n+1,\,1} = x_{n+1} \wedge y_1.$$

Avem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x - x_{n+1} = \mathbf{0} \vee (x - x_{n+1}) \geqslant \mathbf{0} \vee (y_1 - x_{n+1}) =$$

$$= y_1 + ((-y_1) \vee (-x_{n+1})) = y_1 - (y_1 \wedge x_{n+1}) = y_1 - z_{n+1,\,1} \geqslant \mathbf{0}.$$

Deci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant y_1 - z_{n+1,1} \geqslant \mathbf{0} \quad \text{și} \quad \mathbf{0} \leqslant z_{n+1,\,1} \leqslant x_{n+1}.$$

Să notăm

$$z_{n+1,\,2} = x_{n+1} - z_{n+1,\,1}$$

Atunci $z_{n+1,\,2} \geqslant \mathbf{0}$ și

$$x_{n+1} = z_{n+1,\,1} + z_{n+1,\,2}.$$

Deoarece $y_2 - z_{n+1,\,2} \geqslant \mathbf{0}$, iar

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (y_1 - z_{n+1,\,1}) + (y_2 - z_{n+1,\,2})$$

există elementele pozitive $z_{ik} (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k=1,2)$ așa ca $x_i = z_{i1} + z_{i2}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} z_{i1} = y_1 - z_{n+1,\,1}, \quad \sum_{i=1}^{n} z_{i2} = y_2 - z_{n+1,\,2}.$$

De aici rezultă

$$\sum_{i=1}^{n+1} z_{i1} = y_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} z_{i2} = y_2$$

și

$$x_i = z_{i1} + z_{i2}, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$$

Pentru a completa demonstrația se va aplica apoi inducția relativ, la m, ținînd seama că pentru $m=2$ propoziția este adevărată.

Corolar 1.2.1. Dacă $\mathbf{0} \leqslant z \leqslant x+y$, cu $x,\ y \geqslant \mathbf{0}$, *atunci există* $u,\ v$ *așa ca* $\mathbf{0} \leqslant u \leqslant x;\ \mathbf{0} \leqslant v \leqslant y;\ z = u+v$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, n-avem decît să punem $x+y=z+w$ cu $w \geqslant \mathbf{0}$.

Definiția 1.2.2. *Fie x un element oarecare al spațiului liniar reticulat $\mathfrak{X}$. Se numește partea pozitivă a lui x elementul $x_+=x \vee \mathbf{0}$. Se numește parte negativă a lui x elementul $x_-=(-x) \vee \mathbf{0}$. Se numește modulul lui x elementul $|x|=x \vee (-x)$.*

Din definiție rezultă că x_+, x_-, $|x| \geqslant \mathbf{0}$ și că $x_-=(-x)_+=-(x \wedge \mathbf{0})$.

Observație. Din (1.2) și (1.3) rezultă

$$x \vee y=(x-y)_++y;$$

$$x \wedge y=x-(x-y)_+.$$

Deci un spațiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar reticulat dacă și numai dacă pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$ există x_+.

Teorema 1.2.3. *Partea pozitivă și partea negativă a elementelor au următoarele proprietăți:*

(1) $x_+-x_-=x$;
(2) $x_+ \wedge x_-=\mathbf{0}$;
(3) *dacă* $x=u-v$, *iar* $u \wedge v=\mathbf{0}$, *atunci* $u=x_+$ *și* $v=x_-$;
(4) $(x+y)_+ \leqslant x_++y_+$; $(x+y)_- \leqslant x_-+y_-$.

Demonstrație. (1) Folosind (1.7), avem

$$x_+-x_-=(x \vee \mathbf{0})-(-(x \wedge \mathbf{0}))=(x \vee \mathbf{0})+(x \wedge \mathbf{0})=x.$$

(2) Să notăm $y=x_+ \wedge x_-$ și să considerăm elementele

$$z_1=x_+-y, \quad z_2=x_--y.$$

Din $z_1, z_2 \geqslant \mathbf{0}$ și din $x=z_1-z_2$ rezultă $z_1 \geqslant x_+$, de unde $y \leqslant \mathbf{0}$. Dar $y \geqslant \mathbf{0}$, deci $y=\mathbf{0}$.

(3) Din $u, v \geqslant \mathbf{0}$ și $u \geqslant x$ rezultă $u \geqslant x_+$.

Să notăm $y=u-x_+$. Avem

$$v=u-x=u-x_++x_-=y+x_-.$$

Din $u=y+x_+$ și $v=y+x_-$ rezultă $u \wedge v \geqslant y$ și, cum $y \geqslant \mathbf{0}$, rezultă $y=\mathbf{0}$. Astfel, $u=x_+$ și $v=x_-$.

(4) Este evident că $x+y \leqslant x_++y_+$ și, cum $x_++y_+ \geqslant \mathbf{0}$, rezultă $(x+y)_+ \leqslant x_++y_+$. Avem apoi

$$(x+y)_-=(x+y)_+-(x+y) \leqslant x_++y_+-(x+y)=(x_+-x)+(y_+-y)=x_-+y_-$$

Teorema 1.2.4. *Modulul elementelor are următoarele proprietăți:*

(1) $|x|=\mathbf{0} \Leftrightarrow x=\mathbf{0}$;
(2) $|x|=x_++x_-$;
(3) $|x|=x_+ \vee x_-$;
(4) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$;
(5) $|\alpha x|=|\alpha||x|$;
(6) $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$;
(7) $y \leqslant x \leqslant z \Rightarrow |x| \leqslant |y| \vee |z|$;
(8) $|x-y|=(x \vee y)-(x \wedge y)$;

Scanned with OKEN Scanner

(9) *pentru orice elemente* x, y, z *au loc inegalităţile*

$$|(x \vee z)-(y \vee z)| \leqslant |x-y|;$$
$$|(x \wedge z)-(y \wedge z)| \leqslant |x-y|.$$

Demonstraţie.

(1) Este imediată

(2) $|x| = x \vee (-x) = (2x \vee \mathbf{0}) - x = 2x_+ - (x_+ - x_-) = x_+ + x_-$.

(3) Folosind proprietatea precedentă, egalitatea (1.7) şi teorema 1.2.3, (2) deducem

$$|x| = x_+ + x_- = (x_+ \vee x_-) + (x_+ \wedge x_-) = x_+ \vee x_-.$$

(4) $|x+y| = (x+y)_+ + (x+y)_- \leqslant x_+ + y_+ + x_- + y_- = |x| + |y|$.

(5) Dacă $\alpha > 0$, atunci

$$|\alpha x| = (\alpha x) \vee (-\alpha x) = (\alpha x) \vee (\alpha(-x)) = \alpha(x \vee -x) = \alpha|x|.$$

Dacă $\alpha < 0$, atunci $|\alpha x| = |-\alpha x| = (-\alpha)|x| = |\alpha||x|$.

(6) Din $x = (x-y)+y$ rezultă $|x| \leqslant |x-y| + |y|$ sau $|x| - |y| \leqslant |x-y|$. Analog se arată că $|y| - |x| \leqslant |x-y|$.

Rezultă

$$||x| - |y|| = (|x| - |y|) \vee (|y| - |x|) \leqslant |x-y|.$$

(7) Avem $x \leqslant z \leqslant |z|$ şi $-x \leqslant -y \leqslant |y|$, de unde

$$|x| = x \vee (-x) \leqslant |y| \vee |z|.$$

(8) Avem

$$|x-y| = (x-y)_+ + (x-y)_- = ((x-y) \vee \mathbf{0}) - ((x-y) \wedge \mathbf{0}) =$$
$$= \{((x-y) \vee \mathbf{0}) + y\} - \{((x-y) \wedge \mathbf{0}) + y\} = (x \vee y) - (x \wedge y).$$

(9) Avem

$$|(x \vee z)-(y \vee z)| = (x \vee y \vee z) - (x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \vee y \vee z) - (x \wedge y) \vee z$$
$$|(x \wedge z)-(y \wedge z)| = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) - (x \wedge y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z - (x \wedge y \wedge z)$$

de unde rezultă

$$|(x \vee z)-(y \vee z)| + |(x \wedge z)-(y \wedge z)| = ((x \vee y \vee z) + (x \vee y) \wedge z) - ((x \wedge y) \vee z) +$$
$$+ (x \wedge y \wedge z)) = ((x \vee y) + z) - ((x \wedge y) + z) = (x \vee y) - (x \wedge y) = |x-y|.$$

De aici rezultă cele două inegalităţi din enunţ.

1.3. SPAŢII LINIARE COMPLET RETICULATE

Definiţia 1.3.1. *Se numeşte spaţiu liniar complet reticulat un spaţiu liniar ordonat care este o latice relativ completă.*

Exemple. Spaţiile $\mathbf{R}^n$, (s), (l^p), $\mathbf{F}(T)$, $\mathbf{S}(T)$, $\mathbf{V}(T)$ sînt exemple de spaţii liniare complet reticulate.

Observaţie. Un spaţiu liniar ordonat $\mathfrak{X}$ este un spaţiu liniar complet reticulat dacă şi numai dacă $\mathfrak{X}$ este o mulţime dirijată şi orice mulţime majorată de elemente din $\mathfrak{X}$ admite o margine superioară.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.3.1. *Fie* $\mathfrak{X}$ *un spațiu liniar complet reticulat,* $x>\mathbf{0}$ $(x\in\mathfrak{X})$ *și* $\{\alpha_h\}_{h\in H}$ *o familie majorată de numere reale. Atunci*

$$(\bigvee_{h\in H}\alpha_h)x=\bigvee_{h\in H}(\alpha_h x).$$

O propoziție analogă are loc în cazul cînd $\{\alpha_h\}_{h\in H}$ este minorantă, înlocuind marginea superioară prin marginea inferioară.

Demonstrație. Să punem $\alpha=\bigvee_{h\in H}\alpha_h$. Deoarece $x>\mathbf{0}$, din $\alpha_h\leqslant\alpha$ rezultă $\alpha_h x\leqslant\alpha x$, oricare ar fi $h\in H$. Există deci

$$y=\bigvee_{h\in H}(\alpha_h x)$$

și $y\leqslant\alpha x$.

Să observăm acum că pentru orice $n\in\mathbf{N}$ există $\alpha_{h_n}\geqslant\alpha-\frac{1}{n}$, deci

$$\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)x\leqslant y:$$

Notînd $v=\alpha x-y$, rezultă $nv\leqslant x$ oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$, deci există $w=\bigvee_{n\in\mathbf{N}}(nv)$. Din $nv\leqslant w$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, rezultă $(n+1)v\leqslant w$ sau $nv\leqslant w-v$, de asemenea pentru orice $n\in\mathbf{N}$. Rezultă $w\leqslant w-v$, deci $v\leqslant\mathbf{0}$. Am arătat astfel că și $\alpha x\leqslant y$, și cum inegalitatea contrară a fost stabilită mai sus, rezultă $\alpha x=y$.

Observație. Teorema 1.3.1 nu are loc dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar reticulat oarecare, dar, după cum se poate observa din demonstrație, ea are loc în condiții mult mai generale decît condiția ca spațiul să fie complet reticulat.

1.4. SPAȚII RETICULATE NORMATE

Definiția 1.4.1. *Se numește spațiu reticulat normat un spațiu liniar reticulat* $\mathfrak{X}$ *care este în același timp un spațiu liniar normat și în care norma verifică condiția*

$$|x_1|\leqslant|x_2|\Rightarrow\|x_1\|\leqslant\|x_2\|.$$

Dacă $\mathfrak{X}$ este în plus un spațiu Banach, atunci $\mathfrak{X}$ se numește spațiu reticulat Banach.

Din definiție rezultă imediat că

$$\|\,|x|\,\|=\|x\|$$

oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}$.

Ca exemple de spații reticulate Banach menționăm spațiile $\mathbf{C}(T)$, $\mathbf{L}^p(T)$.

Teorema 1.4.1. *Într-un spațiu reticulat normat, convergența în normă are următoarele proprietăți:*

(1) Dacă $\lim_n x_n=x$ și $\lim_n y_n=y$ atunci

$$\lim_n x_n\vee y_n=x\vee y,\quad\lim_n x_n\wedge y_n=x\wedge y.$$

(2) Dacă $x_n\leqslant y_n$, iar $\lim_n x_n=x$ și $\lim_n y_n=y$, atunci $x\leqslant y$.

(3) Dacă $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant\ldots$

Scanned with OKEN Scanner

și dacă $\lim_n x_n = x$, *atunci*

$$x = \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$$

dacă $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots$ *și dacă* $\lim_n x_n = x$, *atunci* $x = \bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$.

Demonstrație. (1) Avem (vezi teorema 1.2.4)

$$|(x_n \vee y_n) - (x \vee y)| \leqslant |(x_n \vee y_n) - (x \vee y_n)| + |(x \vee y_n) - (x \vee y)| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|,$$

de unde rezultă cu proprietățile normei

$$||(x_n \vee y_n) - (x \vee y)|| \leqslant ||x_n - x|| + ||y_n - y||.$$

De aici rezultă

$$\lim_n x_n \vee y_n = x \vee y.$$

Analog se arată că

$$\lim_n x_n \wedge y_n = x \wedge y.$$

(2) Dacă $x_n \leqslant y_n$, atunci $x_n \vee y_n = y_n$. Folosind proprietatea precedentă a convergenței, rezultă $x \vee y = y$, deci $x \leqslant y$.

(3) Fie

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$$

și $\lim_n x_n = x$. Oricare ar fi indicii n și m avem

$$|(x_n \vee x_m) - (x \vee x_m)| \leqslant |x_n - x|,$$

de unde

$$||(x_n \vee x_m) - (x \vee x_m)|| \leqslant ||x_n - x||.$$

Dar pentru $n > m$ avem $x_n \vee x_m = x_n$ astfel că

$$\lim_n ||x_n - (x \vee x_m)|| = 0. \tag{1.10}$$

Dar $\lim_n x_n = x$, deci

$$\lim_n ||x_n - (x \vee x_m)|| = ||x - (x \vee x_m)||.$$

Egalitatea (1.10) se mai scrie deci

$$||x - (x \vee x_m)|| = 0,$$

de unde

$$x - (x \vee x_m) = \mathbf{0}$$

sau

$$x = x \vee x_m$$

sau încă $x \geqslant x_m$. Cum m a fost arbitrar, rezultă că x este un majorant al șirului $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$.

Fie acum $y \geqslant x_n$, oricare ar fi n. Cum $\lim_n x_n = x$, din proprietatea precedentă rezultă $y \geqslant x$. Deci $x = \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$.

Exercițiu. Să se arate că dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu reticulat normat, dacă $\mathbf{0} \leqslant x \in \mathfrak{X}$, $0 < \alpha_n \to +\infty$ și dacă există $y \in \mathfrak{X}$ așa ca $\alpha_n x \leqslant y$, atunci $x = \mathbf{0}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. OPERATORI REGULAȚI

În acest paragraf vom considera operatori liniari definiți pe un spațiu liniar reticulat, cu valori într-un spațiu liniar reticulat sau complet reticulat, care în particular poate să fie dreapta reală.

2.1. OPERATORI ADITIVI ȘI OPERATORI POZITIVI

Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ spații liniare reticulate oarecare.

Lema 2.1.1. *Dacă pe mulțimea elementelor pozitive din $\mathfrak{X}$ este definit un operator U_0 cu valori în $\mathfrak{Y}$, cu proprietatea*

$$U_0(a+b)=U_0(a)+U_0(b),\ (a,\ b\geqslant 0),$$

atunci operatorul dat de formula

$$U(x)=U_0(x_+)-U_0(x_-),\ (x\in\mathfrak{X}) \tag{2.1}$$

este un operator aditiv pe $\mathfrak{X}$.

Demonstrație. Fie $x=x'+x''$ cu $x',\ x''\in\mathfrak{X}$.

Avem $x_+\leqslant x'_+ + x''_+$ de unde

$$x'_+ + x''_+ = x_+ + v$$

cu $v\geqslant 0$. Avem de asemenea

$$x'_- + x''_- = x_- + v.$$

Din egalitățile

$$U_0(x'_+)+U_0(x''_+)=U_0(x_+)+U_0(v),$$

$$U_0(x'_-)+U_0(x''_-)=U_0(x_-)+U_0(v)$$

și din formula (2.1) rezultă

$$U(x')+U(x'')=U_0(x'_+)-U_0(x'_-)+U_0(x''_+)-U(x''_-)=$$

$$=(U_0(x'_+)+U_0(x''_+))-(U_0(x'_-)+U_0(x''_-))=(U_0(x_+)+U_0(v))-$$

$$-(U_0(x_-)+U_0(v))=U_0(x_+)-U_0(x_-)=U(x)$$

și lema este demonstrată.

Definiția 2.1.1. *Un operator $U:\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ se zice pozitiv dacă $U(x)\geqslant 0$ pentru orice element $x\geqslant 0$.*

Dacă U este un operator aditiv și pozitiv, atunci el este monoton, adică: dacă $x_1\leqslant x_2$, atunci $U(x_1)\leqslant U(x_2)$.

Într-adevăr,

$$U(x_2)-U(x_1)=U(x_2-x_1)\geqslant 0$$

deoarece $x_2-x_1\geqslant 0$.

Un operator U aditiv și pozitiv satisface inegalitatea

$$|U(x)|\leqslant U(|x|) \tag{2.2}$$

Într-adevăr, avem

$$|U(x)|=|U(x_+)-U(x_-)|\leqslant|U(x_+|+|U(x_-)|=U(x_+)+U(x_-)=U(x_++x_-)=U(|x|).$$

Teorema 2.1.1. *Un operator aditiv și pozitiv U definit pe un spațiu liniar reticulat cu valori într-un spațiu liniar complet reticulat, este omogen.*

Demonstrație. Să considerăm un element oarecare $x\geqslant 0$ și un număr real α. Există șirurile monotone de numere raționale $\{\rho_n\}_{n\in N}$ și $\{\rho'_n\}_{n\in N}$ așa ca $\rho_n\leqslant\alpha\leqslant\rho'_n$ și $\lim\limits_n \rho_n=\lim\limits_n \rho'_n=\alpha$. Din inegalitățile

$$\rho_n x\leqslant\alpha x\leqslant\rho'_n x$$

și din aditivitatea și monotonia lui U rezultă

$$\rho_n U(x)\leqslant U(\alpha x)\leqslant\rho'_n U(x).$$

De aici rezultă mai departe, prin trecere la margini,

$$\alpha U(x)\leqslant U(\alpha x)\leqslant\alpha U(x)$$

deci

$$U(\alpha x)=\alpha U(x).$$

Pentru x oarecare avem

$$U(\alpha x)=U(\alpha x_+-\alpha x_-)=U(\alpha x_+)-U(\alpha x_-)=\alpha(U(x_+)-U(x_-))=\alpha U(x).$$

Consecință. Orice funcțională aditivă și pozitivă definită pe un spațiu liniar reticulat este liniară.

2.2. OPERATORI REGULAȚI ȘI PROPRIETĂȚILE LOR

Fie $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ spații liniare reticulate.

Definiția 2.2.1. *Un operator U: $\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ se zice regulat dacă se poate reprezenta sub forma $U=U_1-U_2$, unde U_1 și U_2 sînt operatori aditivi și pozitivi.*

Se verifică imediat că, dacă U și V sînt regulați, atunci și $U+V$ și αU sînt regulați.

Dacă U și V sînt doi operatori care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{Y}$, vom pune $U\leqslant V$ dacă $U(x)\leqslant V(x)$ oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}$, adică dacă $V-U$ este un operator pozitiv. Vom spune că U este majorat de V sau că V este minorat de U.

Un operator aditiv U este un operator regulat dacă și numai dacă este majorat de un operator aditiv și pozitiv.

Într-adevăr dacă U este regulat, atunci, cu notațiile din definiția 2.2.1 avem $U\leqslant U_1$. Reciproc, dacă există un operator aditiv și pozitiv V așa ca $U\leqslant V$, atunci punînd $U_1=V$ și $U_2=V-U$, avem $U=U_1-U_2$, unde U_1 și U_2 sînt aditivi și pozitivi.

Se verifică de asemenea, imediat că *dacă un operator aditiv U este majorat sau minorat de un operator regulat, atunci și U este regulat.*

Lema 2.2.1. *Dacă U este un operator regulat, atunci pentru orice mulțime mărginită $E\subset\mathfrak{X}$ mulțimea $U(E)$ este mărginită.*

Demonstrație. Fie $a\leqslant x\leqslant b$ oricare ar fi $x\in E$. Operatorul U fiind regulat, există un operator aditiv și pozitiv V așa ca $V\geqslant U$. Avem

$$U(x)=U(a)+U(x-a)\leqslant U(a)+V(x-a)\leqslant U(a)+V(b-a)$$

deoarece $x-a \geqslant 0$ și $b \geqslant x$.
Avem de asemenea

$$U(x)=U(b)+U(x-b) \geqslant U(b)+V(x-b) \geqslant U(b)+V(a-b),$$

deoarece din $v \leqslant 0$ rezultă $U(v) \geqslant V(v)$.

Teorema 2.2.1. *Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar reticulat și $\mathfrak{Y}$ un spațiu liniar complet reticulat. Pentru ca un operator aditiv $U:\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ să fie un operator regulat, este necesar și suficient ca pentru orice mulțime mărginită $A \subset \mathfrak{X}$ mulțimea $U(A)$ să fie de asemenea mărginită.*

Demonstrație. Necesitatea a fost stabilită în lema 2.2.1.
Să presupunem acum că $U(A)$ este mărginită pentru orice mulțime mărginită $A \subset \mathfrak{X}$. În acest caz pentru orice $x \geqslant 0$ există

$$V_0(x)=\sup \{U(x') \mid 0 \leqslant x' \leqslant x\}.$$

În baza corolarului 1.2.1 pentru orice elemente pozitive x_1, x_2 din $\mathfrak{X}$ avem

$$V_0(x_1+x_2)=\sup \{U(z) \mid 0 \leqslant z \leqslant x_1+x_2\}=\sup \{U(x'+x'') \mid 0 \leqslant x' \leqslant x_1;\ 0 \leqslant x'' \leqslant x_2\}$$
$$=\sup \{U(x') \mid 0 \leqslant x' \leqslant x_1\}+\sup \{U(x'') \mid 0 \leqslant x'' \leqslant x_2\}=V_0(x_1)+V_0(x_2).$$

În baza lemei 2.1.1. prin formula

$$V(x)=V_0(x_+)-V_0(x_-),\ (x \in \mathfrak{X})$$

se obține un operator aditiv V: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. Operatorul V este evident pozitiv, iar din $V(x) \geqslant U(x)$ pentru $x \geqslant 0$, rezultă că V este un majorant al lui U. Deci U este un operator regulat.

2.3. FUNCȚIONALE REGULATE PE SPAȚII RETICULATE NORMATE

În această secțiune prin funcțională continuă pe un spațiu reticulat normat, vom înțelege funcțională care este continuă în topologia normei.

Lema 2.3.1. *Orice funcțională liniară și continuă f definită pe un spațiu reticulat normat $\mathfrak{X}$, este o funcțională regulată.*

Demonstrație. Dacă o submulțime $A \subset \mathfrak{X}$ este mărginită în raport cu ordinea, atunci există $x_0 \in \mathfrak{X}$ așa ca $|x| \leqslant x_0$, $\forall x \in A$ deci $\|x\| \leqslant \|x_0\|$, $\forall x \in A$. Din

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \leqslant \|f\|\,\|x_0\|,\ (\forall x \in A)$$

rezultă că $f(A)$ este mărginită. În baza teoremei 2.2.1, f este o funcțională regulată.

Teorema[1] 2.3.1. *Pe orice spațiu reticulat Banach, o funcțională este liniară și continuă dacă și numai dacă este regulată.*

Demonstrație. În baza lemei precedente, orice funcțională liniară și continuă este regulată.
Fie acum f o funcțională regulată. Deoarece $f=f_1-f_2$ unde f_1, f_2 sînt funcționale liniare pozitive, este suficient să arătăm că orice funcțională

[1] Teorema aparține lui G. Birkhoff.

liniară pozitivă este continuă. Fie deci f o funcțională liniară și pozitivă. Fie $\lim_n x_n = 0$. Există atunci un șir $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de numere pozitive așa ca $\lim_n \lambda_n = +\infty$ iar $\lim_n \lambda_n \|x_n\| = 0$.

Există de asemenea un șir de numere naturale $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ așa ca seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{k_n} \|x_{k_n}\|$$

să fie convergentă[1]. Fie

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{k_n} |x_{k_n}|$$

(convergența seriei înțelegîndu-se în sensul normei). Avem $\lambda_{k_n}|x_{k_n}| \leqslant x$ oricare ar fi n. Funcționala f fiind monotonă și omogenă, rezultă

$$|f(x_{k_n})| \leqslant f(|x_{k_n}|) \leqslant f\left(\frac{1}{\lambda_{k_n}} x\right) = \frac{1}{\lambda_{k_n}} f(x)$$

deci $\lim_n f(x_{k_n}) = 0$. Deoarece din orice subșir $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ se poate extrage un altul $\{x_{j_{l_n}}\}_{n\in\mathbf{N}}$ așa ca $\lim_n f(x_{j_{l_n}}) = 0$, rezultă $\lim_n f(x_n) = 0$. Deci f este continuă.

Observație. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu reticulat normat.

Dacă f este o funcțională liniară, continuă și pozitivă definită pe $\mathfrak{X}$ atunci

$$\|f\| = \sup\{f(x) \mid \|x\| \leqslant 1;\ x \geqslant 0\}. \tag{2.3}$$

Într-adevăr avem

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

deci

$$\sup\{f(x) \mid \|x\| \leqslant 1;\ x \geqslant 0\} \leqslant \|f\|. \tag{2.4}$$

Pe de altă parte, avem $|f(x)| \leqslant f(|x|)$ pentru orice x, precum și $\|x\| = \| |x| \|$ deci dacă $\|x\| \leqslant 1$ atunci

$$|f(x)| \leqslant \sup\{f(x) \mid \|x\| \leqslant 1;\ x \geqslant 0\}.$$

Din această inegalitate rezultă inegalitatea contrară lui (2.4) și deci obținem (2.3).

Exerciții. (1) Să se arate că dacă $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ sînt spații reticulate normate iar $U\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un operator liniar pozitiv și continuu, atunci

$$\|U\| = \sup\{\|U(x)\| \mid \|x\| \leqslant 1;\ x \geqslant 0\}.$$

(2) Să se arate că dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu reticulat Banach $\mathfrak{Y}$ un spațiu reticulat normat iar $U\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un operator regulat, atunci U este continuu.

2.4. FUNCȚIONALE REGULATE PE SPAȚIUL C(T)

În baza teoremei 2.3.1, forma generală a funcționalei regulate pe spațiul $\mathbf{C}([0, 1])$ (al funcțiilor reale continue pe segmentul $T = [0, 1]$) este dată de teorema 2.2.4 din Cap. IV.

---

[1] Este suficient să considerăm pentru fiecare n un indice k_n așa ca $\lambda_{k_n}\|x_{k_n}\| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Să observăm că dacă f este o funcțională liniară și pozitivă pe spațiul $\mathbf{C}([0, 1])$ atunci f este continuă în baza teoremei menționate și notînd cu u funcția $u(t)\equiv 1$, avem $\|f\| = f(u)$. Într-adevăr, din $0 \leqslant x \in \mathbf{C}([0, 1])$ și $\|x\| \leqslant 1$ rezultă $0 \leqslant x \leqslant u$, deci $f(x) \leqslant f(u)$ și n-avem decît să ținem seama de formula (2.3).

Prelungind funcționala f pe spațiul $\mathbf{B}([0, 1])$ (Cap. III, 3.2) cu păstrarea liniarității, continuității și normei, obținem tot o funcțională pozitivă. Într-adevăr, să notăm cu aceeași literă f prelungirea considerată. Dacă $0 \leqslant x \in \mathbf{B}([0, 1])$, atunci există $\lambda > 0$ așa ca $0 \leqslant x(t) \leqslant \lambda$. Dacă notăm $y = u - \frac{1}{\lambda} x$, atunci $0 \leqslant y \leqslant u$ și deci $\|y\| \leqslant 1$ de unde rezultă $|f(y)| \leqslant \|f\| = f(u)$. Rezultă mai departe $f\left(\frac{1}{\lambda} x\right) = f(u - y) = f(u) - f(y) \geqslant 0$, deci $f(x) \geqslant 0$. Notînd, ca în demonstrația teoremei 2.2.4 din Cap. IV, prin z_t funcția caracteristică a segmentului $[0, t]$ și prin φ funcția

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(z_t) \text{ dacă } 0 < t \leqslant 1 \\ 0 \text{ dacă } t = 0 \end{cases}$$

atunci φ este monoton crescătoare. Într-adevăr, dacă $0 < t_1 < t_2$ atunci $z_{t_1} < z_{t_2}$ și deci $\varphi(t_1) = f(z_{t_1}) \leqslant f(z_{t_2}) = \varphi(t_2)$. Cu cele arătate în Cap. IV, funcționala f se reprezintă sub forma

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \mathrm{d}\varphi(t). \tag{2.5}$$

Reciproc, dacă φ este monoton crescătoare, atunci funcționala liniară f dată de (2.5) este pozitivă.

Deci forma generală a funcționalelor liniare pozitive pe $\mathbf{C}([0, 1])$ este dată de formula (2.5), unde φ este o funcție monoton crescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

SPAȚII HILBERT ȘI OPERATORI AUTOADJUNCȚI

Spațiile Hilbert sînt spații Banach în care este verificată „legea paralelogramului". Aceste spații vor face obiectul primelor două paragrafe din acest capitol. Vom studia apoi o clasă importantă de operatori liniari și continui care aplică un spațiu Hilbert în el însuși — operatorii autoadjuncți. Astfel de operatori intervin în particular, în mecanica cuantică.

§ 1. SPAȚIILE HILBERT ȘI PROPRIETĂȚILE LOR

1.1. PRODUS SCALAR

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu liniar[1] față de corpul Γ.

Definiția 1.1.1. *O aplicație* $\psi: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \Gamma$ *se numește funcțională hermitiană, dacă are următoarele proprietăți:*

(i) $\psi(x, y) = \overline{\psi(y, x)}$

(ii) $\psi(x+y, z) = \psi(x, z) + \psi(y, z)$

(iii) $\psi(\alpha x, y) = \alpha \psi(x, y)$, $(\alpha \in \Gamma)$.

Dacă în plus ψ *are proprietatea*

(iv) $x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \psi(x, x) > 0$,

atunci ψ *se numește produs scalar în* $\mathfrak{X}$.

Dacă ψ este o funcțională hermitiană, atunci

$$\psi\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k y_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta}_k \psi(x_j, y_k).$$

Dacă în $\mathfrak{X}$ este dat un produs scalar ψ, atunci se poate defini o normă p pe $\mathfrak{X}$ prin formula

$$p(x) = \sqrt{\psi(x, x)}. \tag{1.1}$$

[1] Ca și în celelalte capitole, notăm prin Γ unul din corpurile $\mathbf{R}$, $\mathbf{K}$. Dacă $\alpha \in \Gamma$, notăm cu $\overline{\alpha}$ numărul conjugat lui α și prin $\mathrm{re}\,\alpha$ partea reală a lui α.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, dacă $p(x)=0$ atunci evident $x=\mathbf{0}$. Este de asemenea evident că

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x),\ (\forall \alpha\in\Gamma).$$

Pentru a arăta că

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y) \tag{1.2}$$

vom stabili mai întîi următoarea inegalitate

$$|\psi(x,\ y)|\leqslant p(x)p(y) \tag{1.3}$$

numită *inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski.*

Dacă unul din elementele x, y este nul, inegalitatea (1.3) este banală. Fie deci x, y nenule. Pentru orice $\lambda\in\Gamma$ avem

$$\psi(x+\lambda y,\ x+\lambda y)\geqslant 0$$

sau

$$\psi(x,\ x)+\overline{\lambda}\psi(x,\ y)+\lambda\psi(y,\ x)+\lambda\overline{\lambda}\psi(y,\ y)\geqslant 0.$$

Înmulțind membrul stîng cu $\psi(y,\ y)$ iar apoi adăugînd și scăzînd $\psi(x,\ y)\overline{\psi(x,\ y)}$, deducem

$$\psi(x,\ x)+\psi(y,\ y)-|\psi(x,\ y)|^2+(\lambda\psi(y,\ y)+\psi(x,\ y))\,(\overline{\lambda}\psi(y,\ y)+\overline{\psi(x,\ y)})\geqslant 0.$$

Luînd acum

$$\lambda\longrightarrow\frac{\psi(x,\ y)}{\psi(y,\ y)}$$

obținem imediat (1.3).

Folosind (1.3) avem

$$(p(x+y))^2=\psi(x+y,\ x+y)=(p(x))^2+2\mathrm{re}\ \psi(x,\ y)+(p(y))^2\leqslant(p(x))^2+$$
$$+2p(x)p(y)+(p(y))^2=(p(x)+p(y))^2$$

deci are loc (1.2).

Norma definită de formula (1.1) se numește *norma generată de produsul scalar* ψ.

1.2. NOȚIUNEA DE SPAȚIU HILBERT

Definiția 1.2.1. *Se numește spațiu Hilbert, un spațiu Banach în care norma este generată de un anumit produs scalar.*

Dacă ψ este produsul scalar care generează norma unui spațiu Hilbert, se va nota

$$\langle x,\ y\rangle=\psi(x,\ y).$$

Putem deci scrie

$$||x||=\sqrt{\langle x,\ x\rangle}$$

precum și

$$|\langle x,\ y\rangle|\leqslant||x||\ ||y||.$$

Observație. Într-un spațiu Hilbert, produsul scalar care generează norma este continuu, adică: $\lim_n x_n = x$ și $\lim_n y_n = y$ implică $\lim_n \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$.

Într-adevăr, din

$$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y\|$$

rezultă $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Analog $\langle x, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Din

$$|\langle x_n - x,\ y_n - y\rangle| \leqslant \|x_n - x\|\ \|y_n - y\|$$

rezultă $\langle x_n - x,\ y_n - y\rangle \to 0$. Rămîne să ținem seama că

$$\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x,\ y_n - y\rangle + \langle x_n, y\rangle + \langle x, y_n\rangle - 2\langle x, y\rangle.$$

Teorema 1.2.1. *Pentru ca un spațiu Banach $\mathfrak{X}$ să fie un spațiu Hilbert, este necesar și suficient ca*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{1.4}$$

oricare ar fi elementele $x, y \in \mathfrak{X}$.

Demonstrație. Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert, atunci

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y,\ x+y\rangle + \langle x-y,\ x-y\rangle =$$
$$= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2 =$$
$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

deci are loc (1.4).

Reciproc, să presupunem că (1.4) are loc oricare ar fi elementele $x, y \in \mathfrak{X}$.

Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Banach real, norma va fi generată de produsul scalar

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \tag{1.5 a}$$

iar dacă $\mathfrak{X}$ este complex, de produsul scalar

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) \tag{1.5 b}$$

Într-adevăr, să presupunem că $\mathfrak{X}$ este complex.

Condiția (i) din definiția 1.1.1 se verifică imediat. Să verificăm (ii). Din (1.5, b) rezultă:

$$\operatorname{re}\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \tag{1.6}$$

și deci

$$\langle x, y\rangle = \operatorname{re}\langle x, y\rangle - i \operatorname{re}\langle ix, y\rangle. \tag{1.7}$$

Pe de altă parte, din (1.4) și (1.6) rezultă prin calcul

$$\operatorname{re}\langle x+z, y\rangle + \operatorname{re}\langle x-z, y\rangle = 2 \operatorname{re}\langle x, y\rangle.$$

Pentru $z = x$ rezulta

$$\operatorname{re}\langle 2x, y\rangle = 2 \operatorname{re}\langle x, y\rangle$$

deci

$$\operatorname{re}\langle x+z, y\rangle + \operatorname{re}\langle x-z, y\rangle = \operatorname{re}\langle 2x, y\rangle.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind x prin $\frac{1}{2}(x+z)$ și z prin $\frac{1}{2}(x-z)$, obținem

$$\mathrm{re}\,\langle x, y\rangle + \mathrm{re}\,\langle z, y\rangle = \mathrm{re}\,\langle x+z, y\rangle.$$

Dacă acum înlocuim x prin ix și z prin iz, atunci ținînd seama de (1.7) obținem

$$\langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle = \langle x+z, y\rangle.$$

Este deci verificată condiția (ii) din definiția 1.1.1.

Deoarece pentru y fixat, funcționala f dată de formula $f(x)=\langle x, y\rangle$ este aditivă, rezultă că pentru orice număr rațional α avem

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle.$$

Cum f este continuă, ultima egalitate are loc pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$. Pe de altă parte $\langle ix, y\rangle = i\langle x, y\rangle$ după cum se verifică imediat. Rezultă că și condiția (iii) din definiția 1.1.1 este verificată.

Din (1.5, b) rezultă imediat că

$$\langle x, x\rangle = ||x||^2$$

de unde rezultă în același timp îndeplinirea condiției (iv) din definiția 1.1.1 și faptul că norma în $\mathfrak{X}$ este generată de un produs scalar.

În cazul cînd $\mathfrak{X}$ este un spațiu Banach real, demonstrația se simplifică ținînd seama că expresia lui $\langle x, y\rangle$ din formula (1.5, a) reprezintă partea reală a expresiei din (1.5, b).

Condiția (1.4) se numește *legea paralelogramului*.

Observație. Orice spațiu Hilbert este un spațiu Banach uniform convex (a se vedea Cap. III, 2.4).

Într-adevăr, pentru orice număr $\varepsilon \in (0,2)$ să punem

$$\eta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Dacă $||x||=||y||=1$, atunci cu legea paralelogramului

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 4$$

Dacă $||x-y|| > \varepsilon$, atunci

$$||x+y||^2 < 4 - \varepsilon^2$$

deci

$$\frac{1}{2}||x+y|| < 1 - \eta(\varepsilon)$$

Exemple. (1) Spațiul Γ^n este un spațiu Hilbert în raport cu norma obișnuită (a se vedea Cap. III, 1.1), această normă fiind generată de produsul scalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$$

unde $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ iar $y=\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$.

(2) Spaţiul (l_{Γ}^2) (a se vedea Cap. III, 3.1) este un spaţiu Hilbert, norma fiind generată de produsul scalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n$$

unde $x=\{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $y=\{\eta_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Convergenţa seriei din membrul al doilea se verifică folosind inegalitatea

$$|\xi_n\bar{\eta}_n| \leqslant \frac{1}{2}(|\xi_n|^2+|\eta_n|^2).$$

(3) Spaţiul $\mathbf{L}_{\Gamma}^2(T)$ (a se vedea Cap. III, 3.3) este un spaţiu Hilbert, norma fiind generată de produsul scalar

$$\langle x, y\rangle = \int_T x(t)\overline{y(t)}dt$$

1.3. ORTOGONALITATE

Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu Hilbert.

Definiţia 1.3.1. *Două elemente $x, y\in\mathfrak{X}$ se zic ortogonale şi se notează $x\perp y$ dacă $\langle x, y\rangle=0$. Două submulţimi A, B ale lui $\mathfrak{X}$ se zic ortogonale şi se notează $A\perp B$ dacă $x\perp y$, $\forall x\in A$, $\forall y\in B$.*

În particular, dacă $A=\{x_0\}$ şi $A\perp B$, se notează $x_0\perp B$ şi se zice că x_0 este ortogonal lui B. Următoarele trei propoziţii se demonstrează imediat.

Propoziţia 1.3.1. *Dacă $x\perp y_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ atunci*

$$x\perp\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i.$$

Propoziţia 1.3.2. *Dacă $x\perp y_n (n\in\mathbf{N})$ şi dacă $\lim_n y_n=y$, atunci $x\perp y$.*

Propoziţia 1.3.3. *Dacă elementele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt ortogonale două cîte două, atunci*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\|x_j\|^2.$$

Propoziţia 1.3.4. *Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un şir de elemente ortogonale două cîte două. Pentru ca seria $\sum_n x_n$ să fie convergentă este necesar şi suficient ca seria $\sum_n\|x_n\|^2$ să fie convergentă.*

Demonstraţie. Necesitatea rezultă imediat cu propoziţia precedentă. Suficienţa rezultă din faptul că punînd

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$$

avem pentru $m>n$

$$||s_m - s_n||^2 = \sum_{i=n+1}^{m} ||x_i||^2.$$

Propoziția 1.3.5. *Dacă A este o submulțime densă a lui $\mathfrak{X}$, iar $x \perp A$ atunci $x=0$.*

Demonstrație. Există un șir $\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente din A așa ca $x=\lim_n x_n$. Cum $x \perp x_n (\forall n \in \mathbf{N})$ rezultă $x=0$ cu propoziția 1.3.2.

Definiția 1.3.2. *Dacă $A \subset \mathfrak{X}$, mulțimea $A^\perp = \{x | x \perp A\}$ se numește complementul ortogonal al lui A.*

Cu propozițiile 1.3.1 și 1.3.2 rezultă că $A^\perp$ este un subspațiu liniar închis al lui $\mathfrak{X}$. Se verifică imediat că dacă $A \subset B$ atunci $A^\perp \supset B^\perp$.

Propoziția 1.3.6. *Oricare ar fi $A \subset \mathfrak{X}$, are loc egalitatea*

$$A^\perp = (\overline{\mathrm{Sp}}(A))^\perp.$$

Demonstrație. Să notăm $E=\overline{\mathrm{Sp}}(A)$. Din $A \subset E$ rezultă $A^\perp \supset E^\perp$. Fie acum $x \in A^\perp$ și să notăm $B=\{x\}^\perp$. Atunci $B \supset A$ și cum B este un subspațiu liniar închis, rezultă $B \supset E$. Deci $x \perp E$ adică $x \in E^\perp$. În concluzie $A^\perp = E^\perp$.

Definiția 1.3.3. *O submulțime A a lui $\mathfrak{X}$ se zice totală dacă $A^\perp = \{0\}$. O familie $\{A_j\}_{j\in J}$ de submulțimi se zice totală, dacă mulțimea $\bigcup_{j\in J} A_j$ este totală.*

1.4. PROIECȚII

Vom nota cu $d(x, y)$ distanța dintre două elemente x, y ale unui spațiu Hilbert $\mathfrak{X}$ și cu $d(x, E)$ distanța de la un element x la o submulțime E a lui $\mathfrak{X}$. Deci

$$d(x, E) = \inf \{||x-y|| \mid y \in E\}.$$

Lema 1.4.1. *Dacă E este o submulțime convexă și închisă (nevidă) a unui spațiu Hilbert $\mathfrak{X}$, atunci pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$ există un element $x' \in E$ și numai unul așa ca $d(x, x') = d(x, E)$.*

Demonstrație. Dacă $x \in E$, se poate lua $x'=x$. Să presupunem că $x \notin E$ și fie $\delta = d(x, E)$. Există un șir $\{y_n\}_{n\in N}$ de elemente din E așa ca

$$\delta = \lim_n ||x-y_n||. \tag{1.8}$$

Cu legea paralelogramului (a se vedea (1.4) în care înlocuim x prin $x-y_n$ și y prin $x-y_m$) avem

$$||2x-(y_n+y_m)||^2 + ||y_m-y_n||^2 = 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2). \tag{1.9}$$

Mulțimea E fiind convexă, avem $2^{-1}(y_n+y_m) \in E$ deci

$$||2x-(y_n+y_m)|| \geqslant 2\delta.$$

Cu (1.9) rezultă

$$||y_n-y_m||^2 \leqslant 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) - 4\delta^2$$

deci $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir Cauchy. Punînd $x'=\lim_n y_n$, avem $x'\in E$ căci E este închisă. Cu (1.8) rezultă $\delta=\|x-x'\|$.

Dacă ar mai exista un punct $x''\in E$ așa ca $\delta=\|x-x''\|$ atunci $2^{-1}(x'+x'')\in E$ deci

$$\|2x-(x'+x'')\|\geqslant 2\delta. \tag{1.10}$$

Folosind legea paralelogramului

$$\|x'-x''\|^2=2(\|x-x'\|^2+\|x-x''\|^2)-\|2x-(x'+x')\|^2$$

și ținînd seama că $\|x-x'\|=\delta$, $\|x-x''\|=\delta$, cu (1.10) rezultă $x'=x''$. Lema este demonstrată.

Elementul x' este numit *element de cea mai bună aproximare în E pentru x.*

Teorema 1.4.1. *Dacă E este un subspațiu liniar închis al unui spațiu Hilbert $\mathfrak{X}$, atunci orice element $x\in\mathfrak{X}$ se reprezintă în mod unic sub forma $x=x'+x''$ cu $x'\in E$ și $x''\in E^{\perp}$.*

Demonstrație. Dacă $x\in E$, se ia $x'=x$ și $x''=\mathbf{0}$.

Să presupunem $x\notin E$ și fie $x'\in E$ așa ca $d(x, x')=d(x, E)$ (lema 1.4.1). Notînd $x''=x-x'$, rămîne de arătat că $x''\in E^{\perp}$. Pentru aceasta, să observăm că $x'-\lambda y\in E$, oricare ar fi $\lambda\in\Gamma$ și $y\in E$. Notînd $\delta=d(x, E)$ avem deci

$$\|x''+\lambda y\|=\|x-(x'-\lambda y)\|\geqslant\delta$$

sau, folosind produsul scalar

$$\|x''\|^2+\overline{\lambda}\langle x'', y\rangle+\lambda\langle y, x''\rangle+|\lambda|^2\|y\|^2\geqslant\delta^2.$$

Presupunînd $y\neq\mathbf{0}$ și făcînd $\lambda=-\langle x'', y\rangle\|y\|^{-2}$ deducem (ținînd seama că $\delta=\|x''\|$)

$$-|\langle x'', y\rangle|^2\|y\|^{-2}\geqslant 0$$

deci $\langle x'', y\rangle=0$. Am arătat astfel că $x''\perp E$.

Dacă elementul x s-ar reprezenta și sub forma $x=x_1+x_2$ cu $x_1\in E$ și $x_2\in E^{\perp}$, atunci am avea $x'-x_1=x_2-x''$ cu $x'-x_1\in E$ și $x_2-x''\in E^{\perp}$. Rezultă $x'=x_1$ și $x''=x_2$.

Observații. (1) Pentru orice subspațiu liniar închis E al spațiului Hilbert $\mathfrak{X}$, are loc egalitatea $E=E^{\perp\perp}$.

Într-adevăr, avem evident $E\subset E^{\perp\perp}$. Dacă $x\in E^{\perp\perp}$ atunci $x\perp E^{\perp}$. Pe de altă parte, cu teorema 1.4.1 avem $x=x'+x''$ cu $x'\in E$ și $x''\in E^{\perp}$. Rezultă $x-x'\perp E^{\perp}$ deci $x''\perp E^{\perp}$ de unde $x''\perp x''$, adică $x''=\mathbf{0}$.

Deci $E^{\perp\perp}\subset E$.

(2) Pentru orice submulțime A a spațiului Hilbert $\mathfrak{X}$, are loc egalitatea: $\overline{\mathrm{Sp}}(A)=A^{\perp\perp}$.

Rezultă cu propoziția 1.3.6 și observația precedentă.

Definiția 1.4.1. *Dacă E este un subspațiu liniar închis al unui spațiu Hilbert $\mathfrak{X}$, se numește proiecția unui element $x\in\mathfrak{X}$ pe E, elementul $x'\in E$ pentru care $x=x'+x''$ cu $x''\in E^{\perp}$. Se notează $x'=[E]x$.*

Elementul x'' din definiția 1.4.1 este evident proiecția lui x pe $E^{\perp}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.5. DESCOMPUNERI ORTOGONALE

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert.

Definiția 1.5.1. *O familie* $\{E_j\}_{j\in J}$ *de subspații liniare închise ale lui* $\mathfrak{X}$ *se numește o descompunere ortogonală a lui* $\mathfrak{X}$, *dacă* $\overline{\mathrm{Sp}}\,(\bigcup_{j\in J} E_j)=\mathfrak{X}$.

Teorema 1.5.1. *Dacă* $\{E_j\}_{j\in J}$ *este o descompunere ortogonală a lui* $\mathfrak{X}$, *atunci orice element* $x\in\mathfrak{X}$ *se reprezintă sub forma*

$$x=\sum_{j\in J} x_j$$

cu $x_j\in E_j$.

Demonstrație. Mulțimea

$$\mathcal{Y}=\{x\mid x=\sum_{j\in J} x_j,\ x_j\in E_j\}$$

formează un subspațiu liniar. Fie acum $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir convergent de elemente din $\mathcal{Y}$ și $x=\lim_n x_n$. Dacă:

$$x_n=\sum_{j\in J} x_{nj},\ (x_{nj}\in E_j),$$

atunci din ortogonalitatea elementelor $x_{ni}-x_{mi}$, $x_{nj}-x_{mj}$ pentru $i\neq j$ rezultă

$$\|x_{ni}-x_{mi}\|^2\leqslant\sum_{j\in J}\|x_{nj}-x_{mj}\|^2=\|x_n-x_m\|^2.$$

Deci $\{x_{nj}\}_{n\in\mathbf{N}}$ este (pentru fiecare $j\in J$) un șir Cauchy.

Fie $x_j=\lim_n x_{nj}$. Atunci $x_j\in E_j$ și se poate arăta că familia $\{x_j\}_{j\in J}$ este sumabilă și are suma x. Deci $x\in\mathcal{Y}$, adică $\mathcal{Y}$ este un subspațiu liniar închis. Din definiția descompunerii ortogonale rezultă $\mathcal{Y}=\mathfrak{X}$.

Teorema este demonstrată.

1.6. SPAȚIILE HILBERT ÎN TEORIA PROBABILITĂȚILOR

Fie E o mulțime și $\mathcal{E}$ o mulțime de părți ale lui E satisfăcînd condițiile

(i) $\emptyset$, $E\in\mathcal{E}$

(ii) dacă $A\in\mathcal{E}$, atunci $\complement A\in\mathcal{E}$;

(iii) dacă $A_n\in\mathcal{E}$ $(n\in\mathbf{N})$ și $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, atunci $A\in\mathcal{E}$.

O funcție $P:\mathcal{E}\to[0,+\infty)$ se numește o *probabilitate* dacă are proprietățile:

1°. $P(E)=1$;

2°. dacă $A_n\in\mathcal{E}$, $(n\in\mathbf{N})$ și $A_n\cap A_m=\emptyset$ pentru $n\neq m$, atunci

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Sistemul $(E,\mathcal{E},P)$ se numește *cîmp de probabilitate.*

Scanned with OKEN Scanner

O funcție $x: E \to \mathbf{R}$ se numește *variabilă aleatoare* dacă pentru orice t real $x^{-1}((-\infty, t)) \in \mathscr{E}$. Pentru o variabilă aleatoare x, integrala

$$m(x) = \int_E x(\omega) \mathrm{d}P(\omega)$$

se definește ca și integrala Lebesgue și cînd x este integrabilă, $m(x)$ poartă numele de *media* lui x.

Se numește *dispersia* lui x numărul

$$\sigma^2(x) = \int_E |x(\omega) - m(x)|^2 \mathrm{d}P(\omega),$$

presupunînd că funcția $|x|^2$ (adică $|x|^2(\omega) = |x(\omega)|^2$) este integrabilă.

Să considerăm mulțimea tuturor variabilelor aleatoare care admit dispersie. Introducem relația de echivalență: $x \sim y$ dacă $x(\omega) = y(\omega)$ cu excepția unei mulțimi A de puncte, cu $P(A) = 0$. Mulțimea $\mathscr{H}$ a claselor de echivalență înzestrată cu operațiile liniare obișnuite și cu norma

$$||x|| = \left(\int_E |x(\omega)|^2 \mathrm{d}P(\omega) \right)^{1/2}$$

formează un spațiu Hilbert. Acest spațiu se poate nota și prin $\mathbf{L}^2(E, \mathscr{E}, P)$.

În teoria probabilităților se presupune adesea că variabilele aleatoare au medie nulă. Submulțimea $\mathscr{H}_0$ a lui $\mathscr{H}$ care conține toate variabilele aleatoare de medie nulă este un subspațiu liniar (Hilbert) al lui $\mathscr{H}$, în care norma coincide cu valoarea medie pătratică $||x|| = \sigma(x)$.

Prin funcție aleatoare se înțelege o funcție numerică x definită pe $T \times E$, unde T este o mulțime (eventual o parte a dreptei reale), astfel ca pentru orice $t \in T$, funcția x_t dată de $x_t(\omega) = x(t, \omega)$, să fie o variabilă aleatoare. În aplicații se consideră mai ales funcții aleatoare, pentru care variabilele aleatoare x_t admit dispersie. Se consideră deci aplicații ale mulțimii T în spațiul Hilbert $\mathscr{H}$. Dacă T este un interval finit sau infinit al dreptei reale, diverse aplicații ale teoriei probabilităților cer considerarea de funcții aleatoare continue, în sensul că aplicația $t \to x_t$ a lui T în $\mathscr{H}$ este continuă în raport cu convergența în normă din spațiul Hilbert $\mathscr{H}$.

§ 2. BAZE ORTONORMALE ÎN SPAȚII HILBERT

În acest paragraf vom considera familii ortonormale de elemente într-un spațiu Hilbert și în particular familii ortonormale maximale.

2.1. FAMILII ORTONORMALE

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert.

Definiția 2.1.1. *O familie $\{e_j\}_{j \in J}$ de elemente ale spațiului $\mathfrak{X}$ se numește familie ortogonală, dacă $e_i \perp e_j$, $(i \neq j)$; dacă familia $\{e_j\}_{j \in J}$ este ortogonală și dacă $||e_j|| = 1$, $\forall j \in J$ atunci familia se zice ortonormală.*

Se verifică cu ușurință că dacă $\{e_j\}_{j \in J}$ este o familie ortogonală, atunci elementele sale formează o mulțime liniar independentă.

Definiția 2.1.2. *Dacă $\{e_j\}_{j \in J}$ este o familie ortonormală de elemente iar $x \in \mathfrak{X}$, atunci numerele $\varphi_j(x) = \langle x, e_j \rangle$, $(j \in J)$ se numesc coeficienții Fourier ai elementului x în raport cu familia ortonormală considerată.*

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 2.1.1. *Dacă* $\{e_j\}_{j\in J}$ *este o familie ortonormală oarecare, atunci pentru orice* $x\in\mathfrak{X}$ *familia de numere* $\{|\varphi_j(x)|^2\}_{j\in J}$ *este sumabilă și are loc inegalitatea*

$$\sum_{j\in J}|\varphi_j(x)|^2\leqslant\|x\|^2. \tag{2.1}$$

Demonstrație. Dacă $\mathscr{F}(J)$ este mulțimea părților finite (nevide) ale lui J iar $H\in\mathscr{F}(J)$, atunci

$$\|x-\sum_{j\in H}\varphi_j e_j\|^2=\|x\|^2-\sum_{j\in H}|\varphi_j|^2 \tag{2.2}$$

(unde $\varphi_j=\varphi_j(x)$), care se obține imediat folosind produsul scalar. În particular

$$\sum_{j\in H}|\varphi_j|^2\leqslant\|x\|^2.$$

De aici rezultă că familia $\{|\varphi_j|^2\}_{j\in J}$ este sumabilă și avem

$$\sum_{j\in J}|\varphi_j|^2=\sup\{\sum_{j\in H}|\varphi_j|^2|H\in\mathscr{F}(J)\}$$

de unde rezultă (2.1).

Observație. Din propoziția (2.1) rezultă că dacă $\{e_j\}_{j\in J}$ este o familie ortonormală infinită, atunci pentru orice element $x\in\mathfrak{X}$ există cel mult o mulțime numărabilă de indici J_0 așa ca $\varphi_j\neq 0$ dacă $j\in J_0$.

Inegalitatea (2.1) se numește *inegalitatea lui Bessel.*

Propoziția 2.1.2. *Fie* $\{e_j\}_{j\in J}$ *o familie ortonormală și* $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ *o familie de numere. Pentru ca familia* $\{\alpha_j e_j\}_{j\in J}$ *să fie sumabilă, este necesar și suficient ca familia* $\{|\alpha_j|^2\}_{j\in J}$ *să fie sumabilă.*

Demonstrație. Dacă H este o parte finită a lui J, atunci

$$\|\sum_{j\in H}\alpha_j e_j\|^2=\sum_{j\in H}|\alpha_j|^2$$

și propoziția rezultă imediat cu teorema 2.3.1. din Cap. III.

Propoziția 2.1.3. *Dacă* $\{e_j\}_{j\in J}$ *este o familie ortonormală și*

$$x=\sum_{j\in J}\xi_j e_j,\quad y=\sum_{j\in J}\eta_j e_j$$

atunci

$$\langle x,\,y\rangle=\sum_{j\in J}\xi_j\bar{\eta}_j$$

Demonstrație. Dacă $\{x_j\}_{j\in J}$ este o familie sumabilă, atunci pentru orice element $y\in\mathfrak{X}$ familia $\{\langle x_j,\,y\rangle\}_{j\in J}$ este sumabilă și

$$\sum_{j\in J}\langle x_j,\,y\rangle=\langle\sum_{j\in J}x_j,\,y\rangle.$$

Într-adevăr, punînd $x=\sum_{j\in J}x_j$, avem pentru orice parte finită $H\subset J$

$$|\sum_{j\in H}\langle x_j,\,y\rangle-\langle x,\,y\rangle|=|\langle\sum_{j\in H}x_j-x,\,y\rangle|\leqslant\|\sum_{j\in H}x_j-x\|\cdot\|y\|$$

de unde rezultă afirmația făcută.

Avem deci:

$$\langle x, y\rangle = \langle \sum_{j\in J} \xi_j e_j, \sum_{j\in J} \eta_j e_j\rangle = \sum_{j\in J} \xi_j \langle e_j, \sum_{j\in J} \eta_j e_j\rangle =$$

$$\sum_{j\in J} \xi_j \Big(\sum_{i\in J} \overline{\eta_i}\langle e_j, e_i\rangle\Big) = \sum_{j\in J} \xi_j \overline{\eta_j}$$

Propoziția 2.1.4. *Dacă* $\{e_j\}_{j\in J}$ *este o familie ortonormală iar un element* $x\in\mathfrak{X}$ *se reprezintă sub forma*

$$x = \sum_{j\in J} \xi_j e_j \quad .$$

atunci reprezentarea este unică și $\xi_j = \varphi_j(x)$, $\forall\, j\in J$.

Demonstrație. Avem

$$\varphi_i(x) = \langle x, e_i\rangle = \sum_{j\in J} \langle \xi_j e_j, e_i\rangle = \xi_i.$$

Exercițiu. Să se arate că dacă $\{e_j\}_{j\in J}$ este o familie ortonormală finită atunci pentru orice $x\in\mathfrak{X}$, expresia $\|x - \sum_{j\in J} \alpha_j e_j\|$ are valoare minimă pentru $\alpha_j = \varphi_j(x)$, $\forall\, j\in J$.

2.2. BAZE ORTONORMALE

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert și $\{e_j\}_{j\in J}$ o familie ortonormală de elemente din $\mathfrak{X}$. *Familia se zice maximală, dacă pentru orice altă familie ortonormală* $\{e'_j\}_{j\in J'}$, *notînd* $E = \{e_j | j\in J\}$ *și* $E' = \{e'_j | j\in J'\}$, *incluziunea* $E\subset E'$ *implică* $E = E'$.

Cu teorema lui Zorn se deduce că există familii ortonormale maximale.

Definiția 2.2.1. *Se numește bază ortonormală a spațiului Hilbert* $\mathfrak{X}$, *orice familie ortonormală maximală.*

Lema 2.2.1. *Pentru ca o familie ortonormală* $\{e_j\}_{j\in J}$ *să fie o bază ortonormală este necesar și suficient ca familia să fie totală.*

Demonstrație. Să punem $E = \{e_j | j\in J\}$. Dacă ar exista un element $x\neq 0$ așa ca $x\perp E$ atunci notînd $e = \|x\|^{-1}x$, avem $e\perp E$ și $\|e\| = 1$ și punînd $E' = E\cup\{e\}$ avem $E\subset E'$ și $E\neq E'$ deci familia $\{e_j\}_{j\in J}$ nu poate fi o bază ortonormală. Reciproc, dacă familia $\{e_j\}_{j\in J}$ nu este maximală, atunci există un element $e\neq 0$ așa ca $e\perp e_j$, $\forall\, j\in J$.

Teorema 2.2.1. *Pentru ca o familie ortonormală* $\{e_j\}_{j\in J}$ *să fie o bază ortonormală, este necesar și suficient ca orice element* $x\in\mathfrak{X}$ *să poată fi reprezentat sub forma*

$$x = \sum_{j\in J} \xi_j e_j. \tag{2.3}$$

Demonstrație. Să presupunem că familia $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală. Fie $x\in\mathfrak{X}$ și să punem

$$x_0 = \sum_{j\in J} \varphi_j(x) e_j.$$

Existența lui x_0 se datorește propozițiilor 2.1.1 și 2.1.2. Avem

$$\langle x-x_0, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{j\in J}\langle \varphi_j(x)e_j, e_i\rangle = \varphi_i(x) - \sum_{j\in J}\varphi_j(x)\langle e_j, e_i\rangle = 0.$$

Deci $x-x_0 \perp e_i$, $\forall i\in J$. Cu lema 2.2.1 rezultă $x-x_0=\mathbf{0}$, deci $x=x_0$, adică x se reprezintă sub forma (2.3) (cu $\xi_j=\varphi_j(x)$).

Reciproc, dacă are loc (2.3), atunci din $x\perp e_i$, $\forall i\in J$ deci din

$$\langle \sum_{j\in J}\xi_j e_j, e_i\rangle = 0, \quad (\forall i\in J)$$

rezultă imediat $\xi_i=0$, $(\forall i\in J)$, deci $x=\mathbf{0}$. Cu lema 2.2.1, familia $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală.

Corolar 2.2.1. *O familie ortonormală $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală dacă și numai dacă pentru orice $x\in\mathfrak{X}$ are loc egalitatea*

$$\|x\|^2 = \sum_{j\in J}|\varphi_j(x)|^2. \tag{2.4}$$

Demonstrație. Dacă familia $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală, atunci egalitatea (2.4) rezultă din (2.3) și propozițiile 2.1.3, 2.1.4.

Reciproc, să presupunem că (2.4) are loc, $\forall x\in\mathfrak{X}$. Dacă H este o parte finită a lui J, atunci cu (2.2) deducem $x=\sum_{j\in J}\varphi_j e_j$. În baza teoremei 2.2.1, familia $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală.

Egalitatea (2.4) se numește *ecuația de închidere.*

Teorema. 2.2.2. *Fie $\{e_j\}_{j\in J}$ o familie ortonormală oarecare în spațiul Hilbert $\mathfrak{X}$. Pentru ca un element $x\in\mathfrak{X}$ să se reprezinte sub forma*

$$x=\sum_{j\in J}\varphi_j(x)e_j \tag{2.5}$$

este necesar și suficient ca x să aparțină subspațiului liniar închis generat de mulțimea $E=\{e_j|j\in J\}$.

Demonstrație. Necesitatea rezultă din definiția sumei unei familii sumabile. Să demonstrăm suficiența. Să notăm $\mathfrak{X}_0=\overline{\mathrm{Sp}}\,(E)$ și să arătăm că familia $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală în $\mathfrak{X}_0$. Cu lema 2.2.1 rămîne de arătat că mulțimea E este totală în $\mathfrak{X}_0$. Fie deci $y\in\mathfrak{X}_0$ așa ca $y\perp e_j$, $\forall j\in J$. Punînd

$$\mathfrak{X}_1=\{z\in\mathfrak{X}_0|z\perp y\},$$

mulțimea $\mathfrak{X}_1$ este un subspațiu liniar închis al lui $\mathfrak{X}_0$. Deoarece $\mathfrak{X}_1\supset E$ rezultă $\mathfrak{X}_1=\mathfrak{X}_0$ și deci $y\perp y$ adică $y=\mathbf{0}$.

Corolar 2.2.2. *Familia ortonormală $\{e_j\}_{j\in J}$ este o bază ortonormală în spațiul Hilbert $\mathfrak{X}$, dacă și numai dacă subspațiul liniar închis generat de mulțimea $E=\{e_j|j\in J\}$ coincide cu $\mathfrak{X}$.*

Aceasta rezultă imediat din teorema 2.2.2 ținînd seama și de teorema 2.2.1.

Cînd un element x se reprezintă sub forma (2.5) se zice că x admite o *dezvoltare Fourier* în raport cu familia ortonornală $\{e_j\}_{j\in J}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.3. DIMENSIUNEA HILBERTIANĂ

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert. Pentru orice submulțime A densă în $\mathfrak{X}$, vom nota cu **card** (A) numărul său cardinal.

Se numește dimensiunea hilbertiană a spațiului $\mathfrak{X}$ și se notează cu $D(\mathfrak{X})$ marginea inferioară a numerelor **card** (A).

Din această definiție rezultă că, dacă $\mathfrak{X}=\{0\}$ atunci $D(\mathfrak{X})=1$. Dacă însă $\mathfrak{X}\neq\{0\}$ atunci[1] $D(\mathfrak{X})\geqq \aleph_0$. Dacă $\mathfrak{X}$ este separabil, atunci $D(\mathfrak{X})=\aleph_0$.

Lema 2.3.1. *Dacă* $\{x_j\}_{j\in J}$ *este o familie ortonormală atunci* **card** $(J)\leqslant D(\mathfrak{X})$.

Demonstrație. Din definiția dimensiunii hilbertiene rezultă că există $A\subset\mathfrak{X}$ așa ca $\overline{A}=\mathfrak{X}$ și **card** $(A)=D(\mathfrak{X})$.

Pentru orice $j\in J$ să considerăm un element $y_j\in A$ așa ca

$$||x_j-y_j||\leqslant\frac{1}{2}.$$

Să observăm că dacă $j\neq k$ atunci $y_j\neq y_k$.

Într-adevăr, dacă $y_j=y_k$ atunci

$$||x_j-x_k||\leqslant||x_j-y_j||+||y_k-x_k||\leqslant 1;$$

dar

$$||x_j-x_k||^2=\langle x_j-x_k,\ x_j-x_k\rangle=2$$

ceea ce este contradictoriu.

Rezultă deci

$$\textbf{card}\ (J)\leqslant\textbf{card}\ (A)=D(\mathfrak{X}).$$

Observație. Dacă $\mathfrak{X}\neq\{0\}$ și **dim** $(\mathfrak{X})<\aleph_0$ atunci orice bază ortonormală este finită și are același număr n de elemente[2]. În acest caz, **dim** $(\mathfrak{X})=n$; dar $D(\mathfrak{X})=\aleph_0$, spațiul fiind separabil.

În cazul cînd dimensiunea algebrică a spațiului Hilbert este infinită are loc:

Teorema 2.3.1. *Dacă* **dim** $(\mathfrak{X})\geqslant\aleph_0$ *iar* $\{e_j\}_{j\in J}$ *este o bază ortonormală, atunci* $D(\mathfrak{X})=$ **card** (J).

Demonstrație. Deoarece spațiul are dimensiune algebrică infinită, rezultă că J este infinită.

Fie E mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite de forma $\sum_j \rho_j e_j$, unde ρ_j sînt scalari cu coeficienți raționali. Avem evident $\overline{E}=\mathfrak{X}$ și deci **card** $(E)\geqslant D(\mathfrak{X})$. Dar **card** $(E)=$ **card** (J) și atunci, cu lema 2.3.1, rezultă și **card** $(E)\leqslant D(\mathfrak{X})$. *Deci* **card** $(J)=$**card** $(E)=D(\mathfrak{X})$.

2.4. REPREZENTAREA SPAȚIILOR HILBERT

Un spațiu Hilbert cu bază ortonormală finită sau numărabilă este un spațiu separabil, după cum rezultă din secțiunea 1.5 din Cap. III și din cele arătate în secțiunea 2.2 din prezentul capitol.

---

[1] Se notează prin $\aleph_0$ (alef zero) numărul cardinal al mulțimii N.

[2] Notăm, ca în cap. I, prin **dim**$(\mathfrak{X})$ dimensiunea algebrică a lui $\mathfrak{X}$.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem acum că în spațiul Hilbert $\mathfrak{X}$ este dată o familie finită sau numărabilă $\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ de elemente liniar independente. Putem obține o familie ortogonală $\{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$, punînd

$$d_1 = c_1, \quad d_n = c_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{nj} d_j$$

unde coeficienții λ_{nj} se determină prin condiția

$$d_n \perp \{d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}\}.$$

Pentru $k<n$ avem

$$\langle d_n, d_k \rangle = \langle c_n, d_k \rangle - \lambda_{nk} ||d_k||^2$$

și, cum $d_k \neq \mathbf{0}$, iar $\langle d_n, d_k \rangle = 0$, rezultă

$$\lambda_{nk} = \frac{\langle c_n, d_k \rangle}{||d_k||^2}$$

Punînd acum

$$e_n = \frac{1}{||d_n||} d_n,$$

obținem o familie ortonormală $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ care este finită sau numărabilă după cum a fost și familia inițială $\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$.

După modul cum a fost construită familia elementelor e_k rezultă că orice element e_n se poate scrie sub forma

$$e_n = \alpha_{n1} c_1 + \alpha_{n2} c_2 + \ldots + \alpha_{nn} c_n$$

și, reciproc, orice element c_n se poate scrie sub forma

$$c_n = \beta_{n1} e_1 + \beta_{n2} e_2 + \ldots + \beta_{nn} e_n.$$

Astfel, cele două mulțimi $\{c_1, c_2, \ldots\}$, $\{e_1, e_2, \ldots\}$ generează același subspațiu liniar. Vom demonstra acum reciproca afirmației făcute la începutul acestei secțiuni[1].

Teorema 2.4.1. *Într-un spațiu Hilbert separabil $\mathfrak{X}$ există o bază ortonormală cel mult numărabilă.*

Demonstrație. Vom considera cazul cînd $\mathfrak{X}$ este infinit dimensional. Deoarece spațiul $\mathfrak{X}$ este separabil, există o mulțime numărabilă A densă în $\mathfrak{X}$. Fie

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

cu $a_n \neq \mathbf{0}$, oricare ar fi n. Vom extrage din această mulțime o submulțime (numărabilă)

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

formată din elemente liniar independente, astfel ca $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

Vom proceda prin inducție.

Vom pune mai întîi $b_1 = a_1$.

Să presupunem apoi că dintre elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ am extras elementele liniar independente $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Dacă elementele $b_1, b_2, \ldots, b_m, a_{n+1}$

[1] Care, pe altă cale, rezultă din 2.3.

sînt liniar independente, vom opri a_{n+1} și vom nota $b_{m+1}=a_{n+1}$. În caz contrar, elementul a_{n+1} va fi exclus.

Obținem în acest mod mulțimea B, formată din elemente liniar independente.

Să observăm acum că, dacă $a_{n+1}\in A$, dar $a_{n+1}\notin B$, atunci există numerele $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m, \alpha$ dintre care cel puțin unul nenul, așa ca

$$\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\ldots+\beta_m b_{m+}\alpha a_{n+1}=\mathbf{0}.$$

Dacă am avea $\alpha=0$, atunci cel puțin unul dintre numerele $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ ar fi nenul și ar rezulta că elementele $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sînt liniar dependente, contrar alegerii acestor elemente. Deci $\alpha\neq 0$, de unde rezultă că a_{n+1} se poate exprima ca o combinație liniară de elemente $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Rezultă $\mathbf{Sp}(A)=\mathbf{Sp}(B)$.

Să construim acum mulțimea

$$E=\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$$

astfel ca $\mathbf{Sp}(E)=\mathbf{Sp}(B)$ iar familia $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ să fie ortonormală (metoda a fost dată la începutul secțiunii).

Familia E este totală. Într-adevăr, dacă $x\perp E$, atunci $x\perp \mathbf{Sp}(E)=\mathbf{Sp}(A)$. Deci $x\perp A$, de unde rezultă $x=\mathbf{0}$, deoarece A este densă în $\mathfrak{X}$.

Teorema 2.4.2. *Orice spațiu Hilbert separabil infinit dimensional, este izomorf (ca spațiu liniar normat)* cu[1] *spațiul* $(\mathbf{l}^2_\Gamma)$.

Demonstrație. Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert separabil (infinit dimensional) atunci, în baza teoremei 2.4.1, există în $\mathfrak{X}$ o bază ortonormală (numărabilă) $\{e_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. În baza teoremelor 2.1.4 și 2.2.1, orice element $x\in\mathfrak{X}$ admite o reprezentare de forma

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$$

unde $\alpha_n=\varphi_n(x)$. Șirul $a=\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un element al spațiului $(\mathbf{l}^2_\Gamma)$, fapt care rezultă din propoziția 2.1.1. Cu corolarul 2.2.1 avem

$$\|a\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2}=\|x\|. \tag{2.6}$$

Vom pune $h(x)=a$. Aplicația h este un izomorfism. Într-adevăr, dacă $\alpha_n=\varphi_n(x)$ și $\beta_n=\varphi_n(y)$, atunci

$$\langle x+y, e_n\rangle=\langle x, e_n\rangle+\langle y, e_n\rangle=\alpha_n+\beta_n$$

adică $\varphi_n(x+y)=\alpha_n+\beta_n$. Deci $h(x+y)=h(x)+h(y)$. La fel de simplu se verifică că $h(\lambda x)=\lambda h(x)$, oricare ar fi $\lambda\in\Gamma$.

Să considerăm acum un element $a=\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ oarecare din $(\mathbf{l}^2_\Gamma)$. Seria cu termenul general $|\alpha_n|^2$ fiind convergentă, rezultă că seria cu termenul general $\alpha_n e_n$ este convergentă. Dacă punem

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,$$

[1] Considerăm spațiul Hilbert $(\mathbf{l}^2_\Gamma)$ cu norma obișnuită (Cap. III, 3.1 și exemplul (2) din secțiunea 1.2 a prezentului capitol).

atunci $\alpha_n=\varphi_n(x)$, deci $a=h(x)$. Deci h aplică $\mathfrak{X}$ pe $(l^2_\Gamma.)$ Aplicația h este biunivocă deoarece cu (2.6) avem

$$||x-y||=||h(x)-h(y)||$$

și deci din $x\neq y$ rezultă $h(x)\neq h(y)$.

Cum h păstrează și norma, rezultă că $\mathfrak{X}$ este izomorf cu (l^2_Γ) prin această aplicație.

Teorema este demonstrată.

Pentru a da o reprezentare a spațiilor Hilbert neseparabile, construim un spațiu Hilbert analog spațiului (l^2_Γ).

Fie J o mulțime infinită oarecare de indici. Vom nota cu $l^2_\Gamma(J)$ mulțimea tuturor familiilor $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ de elemente din Γ pentru care familia $\{|\alpha_j|^2\}_{j\in J}$ este sumabilă. Această mulțime devine un spațiu Hilbert, dacă definim

$$\{\alpha_j\}_{j\in J}+\{\beta_j\}_{j\in J}=\{\alpha_j+\beta_j\}_{j\in J}$$

$$\lambda\{\alpha_j\}_{j\in J}=\{\lambda\alpha_j\}_{j\in J}$$

$$||a||=\sum_{j\in J}|\alpha_j|^2$$

(unde $a=\{\alpha_j\}_{j\in J}$) norma fiind generată de produsul scalar dat de formula

$$\langle a,\ b\rangle=\sum_{j\in J}\alpha_j\bar{\beta}_j$$

(unde $b=\{\beta_j\}_{j\in J}$).

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert oarecare. Considerînd o bază ortonormală $\{e_j\}_{j\in J}$ în acest spațiu, orice element $x\in\mathfrak{X}$ se reprezintă (în mod unic) sub forma

$$x=\sum_{j\in J}\alpha_j e_j$$

unde $\alpha_j=\varphi_j(x)$ (a se vedea secțiunea 2.2). Dacă punem $a=\{\alpha_j\}_{j\in J}$ atunci $a\in l^2_\Gamma(J)$. Punînd

$$h(x)=\{\varphi_j(x)\}_{j\in J}$$

obținem o aplicație a lui $\mathfrak{X}$ pe $l^2_\Gamma(J)$ care este un izomorfism. Deci:

Orice spațiu Hilbert infinit dimensional este izomorf cu un spațiu $l^2_\Gamma(J)$.

2.5. APLICAȚIE LA SPAȚIUL $L^2(T)$

În această secțiune vom aplica unele rezultate obținute în acest capitol la spațiul $L^2(T)=L^2_{\mathbb{R}}(T)$ (a se vedea 1.2 exemplul 3).

Dacă $x,\ y\in L^2(T)$, atunci relația $x\perp y$ înseamnă

$$\int_T x(t)y(t)\mathrm{d}t=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

În spațiul $\mathbf{L}^2(T)$ mulțimea elementelor reprezentate de funcții continue formează o mulțime densă[1]. De aici rezultă că și mulțimea elementelor reprezentate de polinoame este densă.

Într-adevăr, dacă x este o funcție de pătrat integrabil, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există o funcție continuă y așa ca

$$||x-y||<\frac{\varepsilon}{2}.$$

În baza unei cunoscute teoreme a lui Weierstrass[2], există un polinom p așa ca

$$|y(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\lambda}},\quad (t\in T),$$

unde λ este lungimea intervalului T.

Rezultă că

$$||y-p||<\frac{\varepsilon}{2}$$

deci

$$||x-p||\leqslant||x-y||+||y-p||<\varepsilon.$$

Dacă $T=[-\pi,\ \pi]$ atunci mulțimea elementelor reprezentate de polinoame trigonometrice este densă în $\mathbf{L}^2(T)$. Într-adevăr, dacă x este o funcție de pătrat integrabil, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există o funcție y continuă pe același interval, așa ca $||x-y||<\varepsilon/2$.

Fie μ un număr așa ca $|y(t)|\leqslant\mu$, oricare ar fi t și să considerăm un număr $\delta>0$ așa ca

$$\delta<\left(\frac{\varepsilon}{8\mu}\right)^2.$$

Să considerăm funcția continuă z definită în modul următor

$$z(t)=\begin{cases}\alpha t+\beta & \text{dacă } t\in[-\pi,-\pi+\delta]\\ y(t) & \text{dacă } t\in[-\pi+\delta,\ \pi]\end{cases}$$

unde α și β sînt două numere alese astfel ca

$$z(-\pi)=y(\pi),\ \alpha(-\pi+\delta)+\beta=y(-\pi+\delta).$$

În particular $z(-\pi)=z(\pi)$ și $|z(t)|\leqslant\mu$.

Avem

$$||y-z||^2=\int_{-\pi}^{\pi}(y(t)-z(t))^2dt\leqslant(2\mu)^2\delta<\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2$$

de unde

$$||x-z||\leqslant||x-y||+||y-z||<\frac{3\varepsilon}{4}.$$

---

[1] În cap. III, secțiunea 3.3 am lăsat această afirmație ca exercițiu, în cazul mai general al spațiului $\mathbf{L}^p_\Gamma(T)$.

[2] A se vedea, de exemplu: R. Cristescu, Matematici generale, vol. I, 1967, p. 108.

Pe de altă parte, folosind o altă teoremă a lui Weierstrass[1], există un polinom trigonometric

$$p(t)=\sum_{k=0}^{m}(\alpha_k \cos kt+\beta_k \sin kt)$$

aşa ca

$$|z(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}},\quad (t\in T)$$

deci astfel ca

$$\|z-p\|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Rezultă deci

$$\|x-p\|\leqslant\|x-z\|+\|z-p\|<\varepsilon.$$

Am arătat astfel că mulţimea elementelor reprezentate de polinoame trigonometrice este densă în $\mathbf{L}^2([-\pi,\ \pi])$.

Punînd

$$e_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad e_{n1}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\quad e_{n2}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\quad (n\in\mathbf{N})$$

rezultă că familia

$$\{e_0,\ e_{11},\ e_{12},\ e_{21},\ e_{22},\ \ldots\}\tag{2.7}$$

este totală în $\mathbf{L}^2([-\pi,\ \pi])$ şi se verifică imediat că este şi ortonormală.

Orice element $x\in\mathbf{L}^2([-\pi,\ \pi])$ se poate deci scrie sub forma

$$x=\lambda_0 e_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{n1}e_{n1}+\lambda_{n2}e_{n2})$$

unde

$$\lambda_0=\langle x,\ e_0\rangle;\ \lambda_{n1}=\langle x,\ e_{n1}\rangle,\ \lambda_{n2}=\langle x,\ e_{n2}\rangle,\ (n\in\mathbf{N}).$$

Ţinînd seama de expresia produsului scalar care generează norma în $\mathbf{L}^2([-\pi,\ \pi])$ avem

$$\lambda_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\mathrm{d}t,\ \lambda_{n1}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt\ \mathrm{d}t$$

$$\lambda_{n2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt\ \mathrm{d}t.$$

Punînd în sfîrşit

$$\alpha_0=\frac{\lambda_0}{\sqrt{2\pi}},\ \alpha_n=\frac{\lambda_{n1}}{\sqrt{\pi}},\ \beta_n=\frac{\lambda_{n2}}{\sqrt{\pi}},\ (n\in\mathbf{N})$$

putem scrie

$$x(t)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt)$$

unde convergenţa seriei se înţelege în medie pătratică.

[1] Loc. cit. p. 278.

Scanned with OKEN Scanner

Remarcăm, de asemenea, că pentru orice element $x \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$ este verificată ecuația de închidere relativ la familia (2.7) care se traduce prin egalitatea

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt = 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

§ 3. OPERATORI AUTOADJUNCȚI

În tot acest paragraf, vom nota prin $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert oarecare. Vom considera operatori care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$.

3.1. CONJUGATUL UNUI SPAȚIU HILBERT

Următoarea teoremă asupra formei generale a funcționalelor liniare și continue pe un spațiu Hilbert, este cunoscută sub numele de *teorema lui Riesz.*

Teorema 3.1.1. *Dacă f este o funcțională liniară și continuă pe spațiul Hilbert $\mathfrak{X}$, atunci există un element $y \in \mathfrak{X}$ și numai unul așa ca*

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad (x \in \mathfrak{X}) \tag{3.1}$$

și are loc egalitatea

$$\|f\| = \|y\|. \tag{3.2}$$

Reciproc, pentru orice element $y \in \mathfrak{X}$, formula (3.1) *definește o funcțională liniară și continuă pe $\mathfrak{X}$.*

Demonstrație. Fie

$$E = \{x | f(x) = 0\}.$$

Mulțimea E este un subspațiu liniar închis al lui $\mathfrak{X}$. Dacă $E = \mathfrak{X}$, atunci (3.1) are loc cu $y = \mathbf{0}$. Să presupunem că $E \neq \mathfrak{X}$. Să considerăm un element nenul $z \in E^{\perp}$. Deoarece $z \notin E$, rezultă $f(z) \neq 0$. Să punem

$$v = x - \frac{f(x)}{f(z)} z.$$

Din egalitățile

$$f(v) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

rezultă $v \in E$, deci $v \perp z$, adică $\langle v, z \rangle = 0$. Ținînd seama de expresia lui v, putem scrie

$$\langle x, z \rangle - \frac{f(x)}{f(z)} \langle z, z \rangle = 0$$

de unde deducem

$$f(x) = \frac{f(z) \langle x, z \rangle}{\langle z, z \rangle} = \langle x, \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z \rangle.$$

Scanned with OKEN Scanner

Am stabilit deci formula (3.1) cu

$$y = \frac{\overline{f(z)}}{||z||^2} z.$$

Dacă ar mai exista un element $y_1 \in \mathfrak{X}$ așa ca $f(x) = \langle x, y_1 \rangle$, atunci am avea $\langle x, y - y_1 \rangle = 0$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$. Luînd $x = y - y_1$, obținem $||y - y_1||^2 = 0$, deci $y_1 = y$.

Egalitatea (3.2) rezultă din

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leqslant ||x||y||$$

ținînd seama că semnul $\leqslant$ devine $=$ pentru $x = y$.

Faptul că pentru orice $y \in \mathfrak{X}$ formula (3.1) definește o funcțională liniară și continuă rezultă din proprietățile produsului scalar.

Teorema este demonstrată.

Observație. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert, fie $f \in \mathfrak{X}^*$ și să considerăm aplicația $\varphi : \mathfrak{X}^* \to \mathfrak{X}$ definită prin relația

$$f(x) = \langle x, \varphi(f) \rangle, \quad (x \in \mathfrak{X}). \tag{3.3}$$

În baza teoremei precedente, φ este o bijecție între $\mathfrak{X}^*$ și $\mathfrak{X}$ iar $||\varphi(f)|| = ||f||$. Avem de asemenea

$$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$$

și se observă că norma spațiului $\mathfrak{X}^*$ este definită de produsul *scalar* dat de formula

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \overline{\langle \varphi(f_1), \varphi(f_2) \rangle}. \tag{3.4}$$

Faptul că formula (3.4) definește un produs scalar se verifică cu ușurință.

Teorema 3.1.2. *Orice spațiu Hilbert este un spațiu reflexiv*[1].

Demonstrație. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert și $F \in \mathfrak{X}^{**}$.

Deoarece $\mathfrak{X}^*$ este un spațiu Hilbert cu produsul scalar (3.4), există $g \in \mathfrak{X}^*$ așa ca

$$F(f) = \langle f, g \rangle, \quad (f \in \mathfrak{X}^*).$$

Cu formula (3.4) rezultă deci

$$F(f) = \overline{\langle \varphi(f), \varphi(g) \rangle} = \langle \varphi(g), \varphi(f) \rangle.$$

Pe de altă parte, cu definiția funcționalei F_x din Cap. IV, secțiunea 2.3, avem

$$F_x(f) = f(x) = \langle x, \varphi(f) \rangle$$

deci $F = F_{\varphi(g)}$. Cu alte cuvinte $\mathfrak{X}^{**} = \mathfrak{X}_0^{**}$ (cu notațiile din Cap. IV secțiunea 2.3) deci $\mathfrak{X}$ este un spațiu reflexiv.

Observație. Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert real, atunci $\mathfrak{X}^*$ este izomorf cu $\mathfrak{X}$ (prin aplicația φ definită de relația (3.3)).

[1] Mai general se poate demonstra că orice spațiu Banach uniform convex este un spațiu reflexiv.

Scanned with OKEN Scanner

Ca și în capitolul IV, vom nota cu $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ spațiul operatorilor liniari și continui care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$.

Lema 3.2.1. *Pentru ca un operator liniar $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ să fie continuu, este necesar și suficient să existe un număr $\mu > 0$ așa ca*

$$|\langle U(x), y\rangle| \leqslant \mu \|x\| \, \|y\| \tag{3.5}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathfrak{X}$. Cel mai mic număr μ care verifică (3.5) este $\|U\|$.

Demonstrație. Dacă $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, atunci există $\mu > 0$ așa ca

$$\|U(x)\| \leqslant \mu \|x\| \tag{3.6}$$

și cu inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski

$$|\langle U(x), y\rangle| \leqslant \|U(x)\| \, \|y\| \leqslant \mu \|x\| \, \|y\|.$$

Reciproc, să presupunem (3.5) îndeplinită. Luînd $y = U(x)$, obținem

$$\|U(x)\|^2 \leqslant \mu \|x\| \cdot \|U(x)\|$$

de unde deducem (3.6).

Ultima afirmație din enunțul lemei, rezultă din faptul că un număr μ verifică (3.5) dacă și numai dacă verifică (3.6).

Teorema 3.2.1. *Dacă $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, atunci există $U^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ așa ca*

$$\langle U(x), y\rangle = \langle x, U^*(y)\rangle, \quad (x, y \in \mathfrak{X}) \tag{3.7}$$

și $\|U^*\| = \|U\|$.

Demonstrație. Fie $y \in \mathfrak{X}$ și să considerăm funcționala g pe $\mathfrak{X}$ dată de formula

$$g(x) = \langle U(x), y\rangle, \quad (x \in \mathfrak{X}).$$

Deoarece $g \in \mathfrak{X}^*$, există $z \in \mathfrak{X}$ și numai unul așa ca $g(x) = \langle x, z\rangle$, deci astfel ca

$$\langle U(x), y\rangle = \langle x, z\rangle, \quad (x \in \mathfrak{X}). \tag{3.8}$$

Să notăm cu U^* operatorul definit prin $U^*(y) = z$, unde z este dat de (3.8). Deci U^* verifică condiția (3.7). Avem $U^* \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Într-adevăr

$$\langle x, U^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle = \langle U(x), \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \bar{\alpha}\langle U(x), y_1\rangle + \bar{\beta}\langle U(x), y_2\rangle =$$

$$= \bar{\alpha}\langle x, U^*(y_1)\rangle + \bar{\beta}\langle x, U^*(y_2)\rangle = \langle x, \alpha U^*(y_1) + \beta U^*(y_2)\rangle.$$

Cum x a fost oarecare, rezultă

$$U^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha U^*(y_1) + \beta U^*(y_2)$$

adică U^* este liniar.

Deoarece egalitatea (3.7) arată că un număr μ verifică condiția

$$|\langle U(x), y\rangle| \leqslant \mu \|x\| \, \|y\|, \quad (x, y \in \mathfrak{X})$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă și numai dacă verifică condiția

$$|\langle U^*(y),\ x\rangle| \leqslant \mu \|x\| \cdot \|y\|,\ (x, y \in \mathfrak{X})$$

cu lema 3.2.1, rezultă că U este continuu și că

$$\|U^*\| = \|U\|.$$

Definiția 3.2.1. *Dacă* $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, *atunci operatorul* U *dat de egalitatea* (3.7) *se numește adjunctul operatorului* U.

Teorema 3.2.2. *Dacă* $U,\ V \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *iar* $\alpha \in \Gamma$ *atunci:*

1) $(U+V)^* = U^* + V^*$;
2) $(\alpha U)^* = \bar{\alpha} U^*$;
3) $(U^*)^* = U$;
4) $(UV)^* = V^* U^*$;
5) $\|U^* U\| = \|U\|^2$.

Demonstrație. (1) Oricare ar fi $x,\ y \in \mathfrak{X}$

$$\langle x,\ (U+V)^*(y)\rangle = \langle (U+V)(x),\ y\rangle = \langle U(x),\ y\rangle + \langle V(x),\ y\rangle =$$

$$= \langle x,\ U^*(y)\rangle + \langle x,\ V^*(y)\rangle = \langle x,\ U^*(y) + V^*(y)\rangle = \langle x,\ (U^* + V^*)(y)\rangle,$$

de unde rezultă prima proprietate.

(2) Oricare ar fi $x,\ y \in \mathfrak{X}$

$$\langle x,\ (\alpha U)^*(y)\rangle = \langle (\alpha U)(x),\ y\rangle = \alpha \langle U(x),\ y\rangle = \alpha \langle x,\ U^*(y)\rangle =$$

$$= \langle x,\ \bar{\alpha} U^*(y)\rangle$$

de unde rezultă a doua proprietate.

(3) Oricare ar fi $x,\ y \in \mathfrak{X}$

$$\langle x,\ (U^*)^*(y)\rangle = \langle U^*(x),\ y\rangle = \overline{\langle y,\ U^*(x)\rangle} = \overline{\langle U(y),\ x\rangle} = \langle x,\ U(y)\rangle$$

de unde rezultă a treia proprietate.

(4) Oricare ar fi $x,\ y \in \mathfrak{X}$

$$\langle x,\ (UV)^*(y)\rangle = \langle (UV)(x),\ y\rangle = \langle U(V(x)),\ y\rangle = \langle V(x),\ U^*(y)\rangle =$$

$$= \langle x,\ V^*(U^*(y))\rangle = \langle x,\ (V^* U^*)(y))\rangle$$

de unde rezultă a patra proprietate.

(5) Avem

$$\|U(x)\|^2 = \langle U(x),\ U(x)\rangle = |\langle U^*(U(x)),\ x\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \|U^*(U(x))\|\ \|x\| \leqslant \|U^* U\|\ \|x\|^2$$

de unde rezultă

$$\|U\|^2 \leqslant \|U^* U\|$$

Pe de altă parte,

$$\|U^* U\| \leqslant \|U^*\|\ \|U\|$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $\|U\| = \|U^*\|$, are loc inegalitatea

$$\|U^*U\| \leqslant \|U\|^2.$$

Rezultă

$$\|U^*U\| = \|U\|^2.$$

Exercițiu. Să se arate că dacă $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ și dacă există U^{-1} și $U^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, atunci există $(U^*)^{-1}$ și $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$.

3.3. OPERATORI AUTOADJUNCȚI

Definiția 3.3.1. *Un operator* $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ *se zice autoadjunct dacă* $U^* = U$.

Din definiție rezultă că U este autoadjunct dacă

$$\langle U(x), y\rangle = \langle x, U(y)\rangle, \quad (x, y \in \mathfrak{X})$$

În particular rezultă că dacă U este autoadjunct, $\langle U(x), x\rangle$ este real oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$.

Vom nota prin $\mathcal{A}(\mathfrak{X})$ mulțimea operatorilor autoadjuncți.

Observații. (1) Dacă $U, V \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ atunci $U+V \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ iar dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ atunci $\alpha U \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$. Verificarea este imediată.

Dacă $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir de operatori autoadjuncți care converge punctual către un operator U, atunci U este autoadjunct.

Într-adevăr, oricare ar fi elementele $x, y \in \mathfrak{X}$ avem $\langle U(x), y\rangle = \lim_n \langle U_n(x), y\rangle = \lim_n \langle x, U_n(y)\rangle = \langle x, U(y)\rangle$.

În particular, dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert real, atunci $\mathcal{A}(\mathfrak{X})$ este un subspațiu liniar închis al spațiului $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$.

(2) Dacă $U, V \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ atunci

$$UV \in \mathcal{A}(\mathfrak{X}) \Leftrightarrow UV = VU$$

Verificarea este imediată.

Teorema 3.3.1. *Dacă* U *este un operator autoadjunct,* atunci

$$\|U\| = \sup \{|\langle U(x), x\rangle| \mid \|x\| = 1\} \tag{3.9}$$

Demonstrație. Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski, avem pentru $\|x\| = 1$

$$|\langle U(x), x\rangle| \leqslant \|U\|.$$

Notînd

$$\gamma = \sup\{|\langle U(x), x\rangle| \mid \|x\| = 1\}$$

rezultă că $\gamma \leqslant \|U\|$.

Pentru a stabili inegalitatea de sens contrar, să observăm mai întîi că pentru orice element $z \in \mathfrak{X}$ avem

$$|\langle U(z), z\rangle| \leqslant \gamma \|z\|^2 \tag{3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice elemente, $x,\ y \in \mathfrak{X}$ avem

$$\langle U(x+y),\ x+y\rangle = \langle U(x)+U(y),\ x+y\rangle = \langle U(x),\ x\rangle + \langle U(x),\ y\rangle +$$
$$+ \langle U(y),\ x\rangle + \langle U(y),\ y\rangle,$$
$$\langle U(x-y),\ x-y\rangle = \langle U(x)-U(y),\ x-y\rangle =$$
$$= \langle U(x),\ x\rangle - \langle U(x),\ y\rangle - \langle U(y),\ x\rangle + \langle U(y),\ y\rangle.$$

Prin scădere obținem

$$\langle U(x+y),\ x+y\rangle - \langle U(x-y),\ x-y\rangle = 2\langle U(x),\ y\rangle + 2\langle U(y),\ x\rangle =$$
$$= 2\langle U(x),\ y\rangle + 2\langle y,\ U(x)\rangle = 2\langle U(x),\ y\rangle + \overline{2\langle U(x),\ y\rangle} = 4\ \mathrm{re}\ \langle U(x),\ y\rangle.$$

De aici și din (3.10) rezultă

$$|\mathrm{re}\ \langle U(x),\ y\rangle| \leqslant \frac{\gamma}{4}(||x+y||^2 + ||x-y||^2)$$

și cu legea paralelogramului (identitatea (1.4) din § 1)

$$|\mathrm{re}\ \langle U(x),\ y\rangle| \leqslant \frac{\gamma}{2}(||x||^2 + ||y||^2) \tag{3.11}$$

Fie acum α un număr așa ca $|\alpha| = 1$ și

$$\langle U(x),\ y\rangle = \alpha |\langle U(x),\ y\rangle|$$

iar $x' = \alpha^{-1}x$. Avem deci

$$|\langle U(x),\ \bar{y}\rangle| = \langle U(x'),\ y\rangle$$

și cum $||x'|| = ||x||$ cu (3.11) obținem

$$|\langle U(x),\ y\rangle| \leqslant \frac{\gamma}{2}(||x||^2 + ||y||^2) \tag{3.12}$$

oricare ar fi $x,\ y \in \mathfrak{X}$
Dacă $U(x) \neq \mathbf{0}$, atunci punînd

$$y = \frac{||x||}{||U(x)||}\, U(x)$$

inegalitatea (3.12) se reduce la

$$||U(x)|| \leqslant \gamma ||x||$$

după cum se verifică direct. Deoarece ultima inegalitate are evident loc și pentru $U(x) = \mathbf{0}$ rezultă $||U|| \leqslant \gamma$. Am arătat deci că $||U|| = \gamma$ și teorema este demonstrată.

Observații. (1) Din (1.7) rezultă că, dacă $\langle U(x),\ x\rangle = 0$ pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ atunci $U = 0$.

În particular, dacă $U,\ V \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$, atunci $U = V$ dacă și numai dacă $\langle U(x),\ x\rangle = \langle V(x),\ x\rangle$ oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$

(2) Fie U un operator autoadjunct și să punem

$$\omega_U = \inf \{\langle U(x), x\rangle \mid \|x\| = 1\} \tag{3.13}$$

$$\Omega_U = \sup \{\langle U(x), x\rangle \mid \|x\| = 1\} \tag{3.14}$$

Se verifică imediat că

$$\omega_U \|x\|^2 \leqslant \langle U(x), x\rangle \leqslant \Omega_U \|x\|^2$$

Cu (3.9) se deduce de asemenea că

$$\|U\| = \max(|\omega_U|, |\Omega_U|).$$

Numerele ω_U, Ω_U asociate unui operator autoadjunct U vor fi utilizate în acest paragraf precum și în paragraful următor.

Exemple și exerciții. (1) Fie $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă și să considerăm operatorul integral $U : \mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([0, 1]) \to \mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([0, 1])$ definit de φ, adică

$$y = U(x) \Leftrightarrow y(s) = \int_0^1 \varphi(s, t)x(t)\mathrm{d}t \tag{3.15}$$

Dacă φ este simetrică, adică $\varphi(s, t) = \varphi(t, s)$ oricare ar fi t și s, atunci U este autoadjunct.

Într-adevăr, fie $\mathscr{C}$ submulțimea lui $\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}$ ([0, 1]) a tuturor elementelor reprezentate de funcții continue. Dacă x, $v \in \mathscr{C}$, atunci

$$\langle U(x), v\rangle = \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(s, t)x(t)\mathrm{d}t\right)v(s)\mathrm{d}s = \int_0^1\int_0^1 \varphi(s, t)x(t)v(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(s, t)v(t)\mathrm{d}t\right)x(s)\mathrm{d}s = \langle x, U(v)\rangle$$

Dacă x, $v \in \mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([0, 1])$, atunci există șirurile $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ și $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente din $\mathscr{C}$ așa ca $x = \lim\limits_n x_n$, $v = \lim\limits_n v_n$ și avem $\langle U(x), v\rangle = \lim\limits_n \langle U(x_n), v_n\rangle = \lim\limits_n \langle x_n, U(v_n)\rangle = \langle x, U(v)\rangle$.

Deci U este autoadjunct.

(2) Dacă $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{K}$ este o funcție continuă și considerăm operatorul integral $U : \mathbf{L}^2_{\mathbf{K}}([0, 1]) \to \mathbf{L}^2_{\mathbf{K}}([0, 1])$ dat de (3.15), atunci U^* este operatorul integral definit de funcția $\psi(s, t) = \overline{\varphi(t, s)}$. Operatorul U este autoadjunct dacă și numai dacă $\varphi(s, t) = \overline{\varphi(t, s)}$, oricare ar fi t, $s \in [0, 1]$.

(3) Să se arate că în spațiul Hilbert Γ^n operatorul $U : \Gamma^n \to \Gamma^n$ caracterizat de o matrice $\{\alpha_{ij} | i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ are ca adjunct operatorul caracterizat de matricea $\{\alpha'_{ij} | i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ cu $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$

(4) Să se arate că în spațiul Hilbert $\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([0, 1])$ operatorul

$$y = U(x) \Leftrightarrow y(t) = tx(t), \ (\forall t \in [0, 1])$$

este autoadjunct.

3.4. FUNCȚIONALE HERMITIENE MĂRGINITE

Fie $\psi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \Gamma$ o funcțională hermitiană, adică (conform definiției 1.1.1) având proprietățile:

$$\psi(x, y) = \overline{\psi(y, x)}$$

$$\psi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha \psi(x_1, y) + \beta \psi(x_2, y).$$

Ea se numește funcțională hermitiană mărginită dacă există $\mu > 0$ așa ca

$$|\psi(x, y)| \leqslant \mu \|x\| \, \|y\|, \quad (x, y \in \mathfrak{X}).$$

Dacă $U \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ și punem

$$\psi(x, y) = \langle U(x), y \rangle, \quad (x, y \in \mathfrak{X}) \tag{3.16}$$

obținem o funcțională hermitiană mărginită, după cum se verifică imediat.

Reciproc, dacă $\psi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \Gamma$ este o funcțională hermitiană mărginită atunci există $U \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ verificînd (3.16).

Într-adevăr, pentru fiecare $y \in \mathfrak{X}$, funcționala ψ_y dată de formula

$$\psi_y(x) = \psi(x, y), \quad (x \in \mathfrak{X})$$

este liniară și continuă. Pentru fiecare $y \in \mathfrak{X}$ există deci un element $y' \in \mathfrak{X}$ și numai unul singur așa ca

$$\psi(x, y) = \langle x, y' \rangle, \quad (x \in \mathfrak{X})$$

Fie V operatorul dat de formula $V(y) = y'$. Cu proprietățile lui ψ rezultă $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Punînd $U = V^*$ operatorul U este autoadjunct și verifică (3.16).

3.5. OPERATORI AUTOADJUNCȚI POZITIVI

Definiția 3.5.1. *Un operator $U \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ se numește operator autoadjunct pozitiv și se notează $U \geqslant 0$, dacă $\langle U(x), x \rangle \geqslant 0$, $\forall x \in \mathfrak{X}$.*

Se verifică imediat că dacă $V \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ și punem $U = VV^*$ atunci U este un operator autoadjunct pozitiv. Operatorul V^*V este de asemenea un operator autoadjunct pozitiv. În particular, dacă $V \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$, atunci $V^2 \geqslant O$.

În mulțimea $\mathcal{A}(\mathfrak{X})$ se va considera următoarea relație de ordine: $U_1 \leqslant U_2 \Leftrightarrow U_2 - U_1 \geqslant 0$. Cu alte cuvinte

$$U_1 \leqslant U_2 \Leftrightarrow \langle U_1(x), x \rangle \leqslant \langle U_2(x), x \rangle, \quad \forall x \in \mathfrak{X}$$

Observații. (1) Un operator autoadjunct U este pozitiv, dacă și numai dacă $\omega_U \geqslant 0$ (a se vedea 3.13).

(2) Dacă $U, V \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ și $O \leqslant U \leqslant V$, atunci $\|U\| \leqslant \|V\|$.

Aceasta rezultă cu teorema 3.3.1.

(3) Mulțimea operatorilor autoadjuncți pe un spațiu Hilbert real, este un spațiu liniar ordonat.

Verificarea este imediată.

(4) Dacă $0 \leqslant U \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$, atunci are loc inegalitatea

$$|\langle U(x), y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle U(x), x \rangle} \, \sqrt{\langle U(y), y \rangle}$$

(oricare ar fi $x, y \in \mathfrak{X}$) numită inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski generalizată.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația se poate face ca și în cazul inegalității obișnuite a lui Cauchy-Buniacovski. Lăsăm verificarea în seama cititorului.

Teorema 3.5.1. *În mulțimea* $\mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$, *pentru orice șir crescător și majorat* $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *există marginea superioară* U *și anume* U *este limita punctuală a șirului.*

Demonstrație. Din $U_n \leqslant U_{n+1}$ rezultă

$$\langle U_n(x), x\rangle \leqslant \langle U_{n+1}(x), x\rangle$$

și dacă $U_n \leqslant V$, $(n\in\mathbf{N})$, atunci

$$\langle U_n(x), x\rangle \leqslant \langle V(x), x\rangle, \quad (n\in\mathbf{N}) \tag{3.17}$$

Pentru orice $x\in\mathfrak{X}$, șirul $\{\langle U_n(x), x\rangle\}_{n\in\mathbf{N}}$ este deci convergent.

Fără restrîngerea generalității, putem presupune $U_n \geqslant 0$, $(\forall n\in\mathbf{N})$, căci în caz contrar am considera operatorii $U'_n = U_n - U_1$.

Cu inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski generalizată, avem pentru $n>m$

$$\|(U_n-U_m)(x)\|^4 = \langle (U_n-U_m)(x),\ (U_n-U_m)(x)\rangle^2 \leqslant$$

$$\leqslant \langle (U_n-U_m)(x),\ x\rangle \langle (U_n-U_m)^2(x),\ (U_n-U_m)(x)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \langle (U_n-U_m)(x),\ x\rangle \|U_n-U_m\|\ \|(U_n-U_m)(x)\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \langle (U_n-U_m)(x),\ x\rangle \|V\|\ \|(U_n-U_m)(x)\|^2$$

ținînd seama că

$$0 \leqslant U_h - U_m \leqslant V$$

și folosind observația (2) de mai înainte.
Avem deci

$$\|U_n(x)-U_m(x)\|^2 \leqslant \|V\|(\langle U_n(x),\ x\rangle - \langle U_m(x),\ x\rangle)$$

de unde rezultă că pentru fiecare $x\in\mathfrak{X}$, $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy. Există deci

$$U(x) = \lim_n U_n(x), \quad (x\in\mathfrak{X}).$$

Este evident că U este un operator autoadjunct și că

$$\langle U_n(x), x\rangle \leqslant \langle U(x), x\rangle, \quad (\forall x\in\mathfrak{X})$$

deci $U_n \leqslant U$. Pe de altă parte, din (3.17) rezultă $U \leqslant V$, deci

$$U = \sup_{n\in\mathbf{N}} U_n.$$

Teorema 3.5.2. *Dacă* U *și* V *sînt operatori autoadjuncți pozitivi și dacă sînt permutabili, atunci* UV *este pozitiv.*

Demonstrație. Să definim prin inducție

$$U_1 = \frac{1}{\|U\|}U,$$

$$U_{n+1} = U_n - U_n^2, \quad (n\in\mathbf{N})$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$0 \leqslant U_n \leqslant I \tag{3.18}$$

unde I este operatorul identitate.

Într-adevăr, pentru $n=1$, (3.18) au loc deoarece

$$0 \leqslant U \leqslant \|U\| I$$

Să presupunem că (3.18) are loc pentru $n=m$. Pentru $n=m+1$ avem

$$I - U_{m+1} = (I - U_m) + U_m^2 \geqslant 0$$

deci $U_{m+1} \leqslant I$. Pentru a arăta că $U_{m+1} \geqslant 0$, să observăm că

$$U_{m+1} = U_m - U_m^2 = U_m (I - U_m)^2 + U_m^2 (I - U_m)$$

Dar

$$\langle U_m (I - U_m)^2 (x), x \rangle = \langle U_m ((I - U_m)(x)),\ (I - U_m)(x) \rangle \geqslant 0$$

deci

$$U_m (I - U_m)^2 \geqslant 0$$

Analog

$$U_m^2 (I - U_m) \geqslant 0$$

de unde rezultă $U_{m+1} \geqslant 0$.

Am stabilit deci inegalitățile (3.18) pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să arătăm acum că

$$U_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2(x) \tag{3.19}$$

Avem

$$U_1 = U_1^2 + U_2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3 = \ldots = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2 + U_{n+1}$$

de unde

$$\sum_{k=1}^{n} U_k^2 = U_1 - U_{n+1} \leqslant U_1$$

și prin urmare

$$\sum_{k=1}^{n} \langle U_k(x),\ U_k(x) \rangle \leqslant \langle U_1(x),\ x \rangle$$

Seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|U_k(x)\|^2$$

este deci convergentă. În particular $\lim_n U_n(x) = 0$ și deci din

$$\left(\sum_{k=1}^{n} U_k^2 \right)(x) = U_1(x) - U_{n+1}(x)$$

rezultă (3.19).

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm acum că V, fiind permutabil cu U, este permutabil și cu orice U_k deci

$$\langle (UV)(x),\ x\rangle = \|U\|\langle (VU_1)(x),\ x\rangle = \|U\|\langle V(U_1(x)),\ x\rangle =$$

$$= \|U\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle V(U_k^2(x)),\ x\rangle = \|U\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle (U_k V U_k)(x),\ x\rangle =$$

$$= \|U\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle V(U_k(x)),\ U_k(x)\rangle \geqslant 0$$

deci $UV \geqslant 0$.

Teorema este demonstrată.

Fie acum U un operator autoadjunct pozitiv. *Un operator autoadjunct V se zice că este rădăcina pătrată a lui U dacă $V^2 = U$.*

Teorema 3.5.3. *Orice operator autoadjunct pozitiv U admite o rădăcină pătrată pozitivă V și numai una singură.*

Demonstrație. (a) Se poate presupune $\|U\| = 1$ deci $U \leqslant I$. Vom defini prin inducție

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= O \\ V_{n+1} &= V_n + \frac{1}{2}(U - V_n^2) \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Avem

$$0 \leqslant V_n \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$$

$$V_n V_m = V_m V_n$$

Se verifică de asemenea cu ușurință că

$$I - V_{n+1} = \frac{1}{2}(I - V_n)^2 + \frac{1}{2}(I - U) \tag{3.21}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}((I - V_{n-1}) + (I - V_n))(V_n - V_{n-1}) \tag{3.22}$$

Din (3.21) rezultă $V_n \leqslant I$ oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, iar din (3.22) rezultă prin inducție că $V_n \leqslant V_{n+1}$. Există deci un operator autoadjunct pozitiv V așa ca

$$V = \sup_{n \in \mathbf{N}} V_n$$

și anume

$$V(x) = \lim_n V_n(x),\ (x \in \mathfrak{X}) \tag{3.23}$$

Din (3.20) rezultă

$$V = V + \frac{1}{2}(U - V^2)$$

deci $V^2 = U$.

(b) Dacă $0 \leqslant W \in \mathcal{A}(\mathfrak{X})$ și $W^2 = U$, atunci evident

$$UW = WU$$

De aici și din (3.20) și (3.23) rezultă și $VW = WV$.

Dacă $x \in \mathfrak{X}$, iar $y = (V - W)(x)$, atunci

$$\langle V(y), y\rangle + \langle W(y), y\rangle = \langle (V+W)(y), y\rangle = \langle (V+W)(V-W)(x), y\rangle =$$
$$= \langle (V^2 - W^2)(x), y\rangle = 0$$

Deoarece $V, W \geqslant 0$, rezultă

$$\langle V(y), y\rangle = \langle W(y), y\rangle = 0$$

Cum $0 \leqslant V \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$, în baza celor arătate mai sus, există $A \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ așa ca $V = A^2$. Din

$$\|A(y)\|^2 = \langle A^2(y), y\rangle = \langle V(y), y\rangle = 0$$

rezultă $A(y) = \mathbf{0}$, deci

$$V(y) = A(A(y)) = \mathbf{0}.$$

Analog $W(y) = \mathbf{0}$. Deci

$$\|V(x) - W(x)\|^2 = \langle (V-W)^2(x), x\rangle = \langle (V-W)(y), x\rangle = 0$$

de unde rezultă $V(x) = W(x)$ oricare ar fi $x \in \mathfrak{X}$, adică $V = W$.

Teorema este demonstrată.

Exemplu. Fie $\mathfrak{X} = \mathbf{L}^2_K([0, 1])$ și operatorul U: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ definit prin:

$$y = U(x) \Leftrightarrow y(t) = tx(t), \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Atunci $U \geqslant 0$, iar rădăcina pătrată pozitivă V a lui U este operatorul

$$z = V(x) \Leftrightarrow z(t) = \sqrt{t}x(t), \quad (\forall t \in [0, 1]).$$

Verificarea este imediată.

3.6. PROIECTORI

Dacă E este un subspațiu liniar închis al spațiului Hilbert $\mathfrak{X}$, atunci operatorul P_E definit de egalitatea

$$P_E(x) = [E]x$$

se numește proiector[1] (a se vedea secțiunea 1.4). El poate fi notat și prin $[E]$.

Proiectorul este un operator autoadjunct pozitiv, mai precis un operator autoadjunct cu proprietatea $P_E^2 = P_E$.

Verificarea se face cu ușurință.

Reciproc, orice operator autoadjunct P având proprietatea $P^2 = P$ este un proiector.

Într-adevăr, să punem $E = P(\mathfrak{X})$.

Mulțimea E este un subspațiu liniar închis.

Pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, avem

$$x = P(x) + (I - P)(x)$$

[1] Mai complet: *proiectorul determinat de E.*

cu $P(x)\in E$. În plus, pentru orice $y\in\mathfrak{X}$

$$\langle P(y),\ (I-P)(x)\rangle=\langle P(y),\ x\rangle-\langle P(y),\ P(x)\rangle=\langle P(y),\ x\rangle-$$
$$-\langle P^2(y),\ x\rangle=0$$

deci

$$(I-P)(x)\in E^{\perp}.$$

Rezultă $P(x)=[E]x$ oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}$, deci $P=[E]$.

Dacă P este un proiector, atunci pentru orice $x\in\mathfrak{X}$

$$\langle P(x),\ x\rangle=\|P(x)\|^2$$

În particular, dacă P și Q sînt proiectori, atunci $P\leqslant Q$ dacă și numai dacă $\|P(x)\|\leqslant\|Q(x)\|$ oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}$.

Dacă P_E este un proiector și $E\neq\{0\}$ atunci $\Omega_{P_E}=1$; dacă $E^{\perp}\neq\{0\}$ atunci $\omega_{P_E}=0$.

Într-adevăr, din

$$\langle P_E(x),\ x\rangle=\|P_E(x)\|^2\leqslant\|x\|^2$$

rezultă $\Omega_{P_E}\leqslant 1$. Dacă $E\neq\{0\}$ să considerăm un element $x_0\in E$ cu $\|x_0\|=1$. Din $P_E(x_0)=x_0$ rezultă

$$\langle P_E(x_0),\ x_0\rangle=\langle x_0,\ x_0\rangle=1$$

Deci $\Omega_{P_E}=1$.

Dacă $E^{\perp}\neq\{0\}$, atunci există $x\in E^{\perp}$, $x\neq 0$ și, cum $\langle P_E(x),\ x\rangle=0$, rezultă $\omega_{P_E}=0$.

3.7. OPERATORI NORMALI

Definiția 3.7.1. *Un operator $U\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ se zice normal dacă $UU^*=U^*U$.*

Este evident că un operator autoadjunct este normal.

Propoziția 3.7.1. *Pentru ca un operator $U\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ să fie normal, este necesar și suficient ca*

$$\|U(x)\|=\|U^*(x)\| \tag{3.24}$$

oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}$.

Demonstrație. Pentru orice $x\in\mathfrak{X}$

$$\|U(x)\|^2=\langle U(x),\ U(x)\rangle=\langle x,\ (U^*U)(x)\rangle;$$

$$\|U^*(x)\|^2=\langle U^*(x),\ U^*(x)\rangle=\langle x,\ (UU^*)(x)\rangle.$$

Operatorii UU^* și U^*U fiind autoadjuncți, ei sînt egali dacă și numai dacă

$$\langle x,\ (UU^*)(x)\rangle=\langle x,\ (U^*U)(x)\rangle$$

oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}$, deci dacă și numai dacă are loc (3.24), oricare ar fi $x\in\mathfrak{X}$.

Scanned with OKEN Scanner

Propoziția 3.7.2. *Un operator U care aplică un spațiu Hilbert complex în el însuși este normal dacă și numai dacă se poate reprezenta sub forma*

$$U=V_1+iV_2 \tag{3.25}$$

unde V_1 și V_2 sînt operatori autoadjuncți permutabili.

Demonstrație. Dacă U este de forma (3.25), cu V_1 și V_2 autoadjuncți, atunci

$$U^*=V_1-iV_2$$

Dacă V_1 și V_2 sînt permutabili, atunci și U, U^* sînt permutabili.

Reciproc, dacă U este normal, atunci, punînd

$$V_1=\frac{1}{2}(U+U^*),\quad V_2=\frac{1}{2i}(U-U^*),$$

operatorii V_1 și V_2 sînt autoadjuncți și permutabili și are loc (3.25).

Definiția 3.7.2. *Un operator $U:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ se numește unitar dacă are următoarele proprietăți:*

(i) $U(\mathfrak{X})=\mathfrak{X}$;

(ii) $\langle U(x),\ U(y)\rangle=\langle x,\ y\rangle$, oricare ar fi $x, y\in\mathfrak{X}$.

Propoziția 3.7.3. *Dacă U este un operator unitar, atunci U este liniar, continuu și inversabil.*

Demonstrație. Fie $x_1, x_2\in\mathfrak{X}$ și $\alpha, \beta\in\Gamma$. Oricare ar fi $y\in\mathfrak{X}$, avem

$$\langle U(\alpha x_1+\beta x_2)-\alpha U(x_1)-\beta U(x_2),\ U(y)\rangle =$$

$$=\langle U(\alpha x_1+\beta x_2),\ U(y)\rangle-\alpha\langle U(x_1),\ U(y)\rangle-\beta\langle U(x_2),\ U(y)\rangle =$$

$$=\langle \alpha x_1+\beta x_2,\ y\rangle-\alpha\langle x_1, y\rangle-\beta\langle x_2, y\rangle=0.$$

Deoarece $U(\mathfrak{X})=\mathfrak{X}$, orice element $z\in\mathfrak{X}$ se poate pune sub forma $U(y)$. Rezultă

$$U(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha U(x_1)+\beta U(x_2),$$

deci U este liniar.

Din proprietatea (ii) din definiția 3.7.2 rezultă de asemenea că $\|U(x)\|=\|x\|$ deci U este continuu și inversabil.

Observații. (1) Fie U un operator liniar și continuu care aplică biunivoc spațiul $\mathfrak{X}$ pe el însuși. Pentru ca U să fie unitar, este necesar și suficient ca $U^*=U^{-1}$.

Lăsăm afirmația ca exercițiu.

(2) Din observația precedentă rezultă că pentru ca un operator $U\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ să fie unitar, este necesar și suficient ca

$$UU^*=U^*U=I.$$

În particular un operator unitar este normal.

Scanned with OKEN Scanner

(3) Pentru un operator liniar U, condiția (ii) din definiția 3.7.2 este echivalentă cu condiția

$$||U(x)|| = ||x||, \quad (\forall x \in \mathfrak{X}) \tag{3.26}$$

(a se vedea teorema 1.2.1 și formulele (1.5 a), (1.5 b).

Un operator liniar U care satisface condiția (3.26) se numește *operator izometric*.

§ 4. REZOLVANTA ȘI SPECTRUL UNUI OPERATOR AUTOADJUNCT

Ca și în paragraful precedent, vom nota cu $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert oarecare.

4.1. NUMERE PROPRII ȘI ELEMENTE PROPRII

Definiția 4.1.1. *Un subspațiu liniar $E \subset \mathfrak{X}$ se zice invariant pentru un operator $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, dacă $U(E) \subset E$.*

Propoziția 4.1.1. *Dacă $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ iar E este un subspațiu invariant pentru U, atunci și $E^{\perp}$ este invariant pentru U.*

Demonstrația este imediată.

Definiția 4.1.2. *Un număr $\lambda \in \Gamma$ se numește număr propriu*[1] *pentru un operator $U: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, dacă există $x \neq 0$ așa ca $U(x) = \lambda x$. În acest caz x se numește element propriu corespunzător numărului λ.*

Mulțimea numerelor proprii pentru un operator U, va fi notată $\mathcal{P}(U)$. Această mulțime poate fi și vidă.

Dacă $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ iar $\lambda \in \mathcal{P}(U)$, vom nota

$$\mathcal{E}_\lambda(U) = \{x \in \mathfrak{X} \mid U(x) = \lambda x\}$$

Mulțimea $\mathcal{E}_\lambda(U)$ este un subspațiu liniar și închis, invariant pentru U. Verificarea este imediată.

Propoziția 4.1.2. *Dacă $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$, atunci $\mathcal{P}(U) \subset [\omega_U, \Omega_U]$.*

Demonstrație. Fie $\lambda \in \mathcal{P}(U)$ și $0 \neq x \in \mathcal{E}_\lambda(U)$. Se poate evident presupune $||x|| = 1$, căci $\mathcal{E}_\lambda(U)$ este un subspațiu liniar. Avem

$$\langle U(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda$$

deci

$$\omega_U \leqslant \lambda \leqslant \Omega_U.$$

Propoziția 4.1.3. *Dacă $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$, iar $\lambda, \mu \in \mathcal{P}(U)$ și $\lambda \neq \mu$ atunci $\mathcal{E}_\lambda(U) \perp \mathcal{E}_\mu(U)$.*

Demonstrație. Dacă $x \in \mathcal{E}_\lambda(U)$ și $y \in \mathcal{E}_\mu(U)$, atunci

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle U(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

deci $\langle x, y \rangle = 0$.

---

[1] Se obișnuiește a se zice și *valoare proprie*.

În mecanica cuantică, unde mărimile fizice sînt reprezentate prin operatori autoadjuncți, numerele proprii ale operatorului sînt valorile mărimii fizice corespunzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 4.1.1. *Fie* $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ *şi* $\lambda \in \Gamma$. *Pentru ca* $\lambda \in \mathcal{P}(U)$ *este necesar şi suficient ca*

$$\overline{(U-\lambda I)(\mathfrak{X})} \neq \mathfrak{X} \tag{4.1}$$

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathcal{P}(U)$ şi $\mathbf{0} \neq x_0 \in \mathcal{E}_\lambda(U)$. Pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ avem

$$\langle x_0, (U-\lambda I)(x)\rangle = \langle (U-\lambda I)(x_0), x\rangle = 0$$

deci $x_0 \perp (U-\lambda I)(\mathfrak{X})$, de unde $x_0 \perp \overline{(U-\lambda I)(\mathfrak{X})}$. Rezultă că are loc (4.1) căci $x_0 \neq \mathbf{0}$.

Reciproc, să presupunem că are loc (4.1). Pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$ avem evident, dacă $\mathbf{0} \neq x_0 \perp (U-\lambda I)(\mathfrak{X})$

$$\langle x, (U-\bar{\lambda} I)(x_0)\rangle = \langle (U-\lambda I)(x), x_0\rangle = 0$$

de unde $(U-\bar{\lambda} I)(x_0) = \mathbf{0}$. Rezultă că $\bar{\lambda}$ şi deci că λ este un număr propriu pentru U.

4.2. REZOLVANTA ŞI SPECTRUL

Fie $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$, $\lambda \in \Gamma$ şi să considerăm ecuaţia

$$(U-\lambda I)(x) = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

Vom nota

$$\mathfrak{X}_\lambda(U) = (U-\lambda I)(\mathfrak{X})$$

Condiţia ca ecuaţia (4.2) să aibă numai soluţia nulă, adică condiţia ca $\lambda \notin \mathcal{P}(U)$ este echivalentă cu condiţia ca să existe operatorul $(U-\lambda I)^{-1}$ pe $\mathfrak{X}_\lambda(U)$.

Dacă $\lambda \notin \mathcal{P}(U)$, atunci pentru orice $y \in \mathfrak{X}_\lambda(U)$, ecuaţia

$$(U-\lambda I)(x) = y$$

are o soluţie şi numai una singură.

Definiţia[1] 4.2.1. *Fie* $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ *şi* $\lambda \in \Gamma$. *Se spune că* λ *este un număr regulat pentru* U, *dacă* $(U-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$. *Mulţimea tuturor numerelor regulate se numeşte rezolventa lui* U *şi se notează cu* $\mathcal{R}(U)$. *Complementara lui* $\mathcal{R}(U)$ *în* Γ *se numeşte spectrul lui* U *şi se notează* $\mathcal{S}(U)$.

Observaţii. (1) Din definiţiile 4.2.1. şi 4.1.2 rezultă $\mathcal{P}(U) \subset \mathcal{S}(U)$.

(2) În baza teoremei 4.1.1 şi a corolarului 1.5.1 din Cap. IV, un număr λ este regulat pentru un operator autoadjunct U dacă şi numai dacă $\mathfrak{X}_\lambda(U) = \mathfrak{X}$.

(3) Mulţimea $\mathcal{R}(U)$ este deschisă.

Într-adevăr, dacă $\alpha_0 \in \mathcal{R}(U)$ şi dacă

$$|\alpha - \alpha_0| < ||(U-\alpha_0 I)^{-1}||^{-1}$$

atunci $\alpha \in \mathcal{R}(U)$ în baza lemei 1.7.2 din Cap. IV şi a observaţiei precedente.

Teorema 4.2.1. *Dacă* $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ *şi* $\lambda \in \Gamma$, *atunci* $\lambda \in \mathcal{R}(U)$ *dacă şi numai dacă există un număr* $\mu > 0$ *aşa ca*

$$||(U-\lambda I)(x)|| \geq \mu ||x||, \quad (x \in \mathfrak{X}) \tag{4.3}$$

[1] Definiţia are sens pentru orice operator liniar care aplică un spaţiu Banach în el însuşi

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație[1]. Dacă $\lambda \in \mathcal{R}(U)$ atunci există evident $\mu > 0$ pentru care să aibă loc (4.3).

Reciproc, dacă condiția (4.3) este satisfăcută atunci din $(U-\lambda I)(x)=\mathbf{0}$ rezultă $x=\mathbf{0}$ și în consecință $\lambda \notin \mathcal{P}(U)$.

În baza teoremei 4.1.1, avem $\overline{\mathfrak{X}_\lambda} = \mathfrak{X}$. Deci dacă $y \in \mathfrak{X}$, atunci există un șir $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente din $\mathfrak{X}_\lambda$ așa ca $y = \lim\limits_n y_n$.

Fie

$$y_n = (U-\lambda I)(x_n), \quad (n \in \mathbf{N})$$

Cu inegalitatea (4.3) avem

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{\mu} \|(U-\lambda I)(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\mu} \|y_n - y_m\|$$

deci $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir Cauchy. Există deci $x = \lim\limits_n x_n$ și

$$(U-\lambda I)(x) = \lim_n (U-\lambda I)(x_n) = \lim_n y_n = y$$

deci $y \in \mathfrak{X}_\lambda$. Deoarece y a fost arbitrar în $\mathfrak{X}$, rezultă $\mathfrak{X}_\lambda = \mathfrak{X}$. În concluzie $\lambda \in \mathcal{R}(U)$.

Corolar 4.2.1. *Un număr λ aparține spectrului unui operator autoadjunct U dacă și numai dacă există un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente din $\mathfrak{X}$ cu $\|x_n\| = 1$, așa ca*

$$\lim_n (U(x_n) - \lambda x_n) = \mathbf{0}$$

Demonstrație. Numărul λ aparține spectrului lui U dacă și numai dacă condiția (4.3) nu este îndeplinită. Condiția (4.3) se mai poate scrie

$$\|(U-\lambda I)(x)\| \geqslant \mu$$

pentru $\|x\| = 1$, de unde rezultă afirmația.

Corolar 4.2.2. *Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert complex, iar $U \in \mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$, atunci orice număr complex $\lambda = \alpha + \beta i$ cu $\beta \neq 0$ este un număr regulat pentru U.*

Demonstrație. Notînd

$$y = U(x) - \lambda x,$$

se verifică imediat că

$$\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\|x\|^2 = 2\beta\|x\|^2 i$$

și deci

$$2|\beta|\,\|x\|^2 \leqslant |\langle x, y\rangle| + |\langle y, x\rangle| \leqslant 2\|x\|\,\|y\|$$

de unde rezultă

$$\|U(x) - \lambda x\| \geqslant |\beta|\,\|x\|.$$

Teorema 4.2.2. *Pentru orice operator autoadjunct U numerele ω_U, Ω_U aparțin spectrului și $\mathcal{S}(U) \subset [\omega_U, \Omega_U]$.*

Demonstrație. Să considerăm mai întîi cazul cînd $\|U\| = \Omega_U$. Fie $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un șir de elemente de normă unitate, așa ca

$$\Omega_U = \lim_n \langle U(x_n), x_n\rangle.$$

[1] Pentru simplificare notăm $\mathfrak{X}_\lambda$ în loc de $\mathfrak{X}_\lambda(U)$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$||U(x_n)-\Omega_U x_n||^2=\langle U(x_n)-\Omega_U x_n,\ U(x_n)-\Omega_U x_n\rangle=$$
$$=||U(x_n)||^2-2\Omega_U\langle U(x_n),\ x_n\rangle+\Omega_U^2\leqslant 2\Omega_U^2-2\Omega_U\langle U(x_n),\ x_n\rangle$$

și deci

$$\lim_n ||U(x_n)-\Omega_U x_n||=0.$$

Cu corolarul 4.2.1 rezultă $\Omega_U\in\mathscr{S}(U)$.

Să considerăm acum cazul cînd $||U||\neq\Omega_U$.

Punînd

$$V=U-\omega_U I$$

avem pentru $||x||=1$,

$$\langle V(x),\ x\rangle=\langle(U-\omega_U I)(x),\ x\rangle=\langle U(x),\ x\rangle-\omega_U$$

de unde rezultă

$$\Omega_V=\sup_{||x||=1}\langle V(x),\ x\rangle=\sup_{||x||=1}\langle U(x),\ x\rangle-\omega_U=\Omega_U-\omega_U$$

și $\omega_V=0$. Deci $||V||=\Omega\ V$ și cu cele arătate mai sus rezultă $\Omega_V\in\mathscr{S}(V)$.

În baza corolarului 4.2.1 există un șir $\{x_n'\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente de normă unitate așa ca

$$\lim_n (V(x_n')-\Omega_V x_n')=\mathbf{0}.$$

Dar

$$V(x_n')-\Omega_V x_n'=U(x_n')-\Omega_U x_n'$$

și tot în baza corolarului 4.2.1 rezultă $\Omega_U\in\mathscr{S}(U)$.

În mod analog se arată că $\omega_U\in\mathscr{S}(U)$.

Să arătăm acum că, dacă $\lambda\in\mathbf{R}$, dar $\lambda\notin[\omega_U,\ \Omega_U]$, atunci λ este regulat. Să presupunem că $\lambda<\omega_U$. Pentru $||x||=1$, avem $\langle U(x),\ x\rangle\geqslant\omega_U$ și deci

$$\langle(U-\lambda I)(x),\ x\rangle\geqslant\omega_U-\lambda.$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski, avem

$$|\langle(U-\lambda I)(x),\ x\rangle|\leqslant||(U-\lambda I)(x)||\ ||x||$$

și pentru $||x||=1$ obținem

$$||(U-\lambda I)(x)||\geqslant\omega_U-\lambda.$$

De aici rezultă că are loc inegalitatea (4.3) cu $\mu=\omega_U-\lambda$ și cu teorema 4.2.2 numărul λ este regulat. În mod analog se arată că dacă $\lambda>\Omega_U$ atunci λ este regulat.

Teorema este demonstrată.

Teorema 4.2.3. *Dacă U este un operator autoadjunct compact (nenul) pe $\mathfrak{X}$, atunci el are cel puțin un număr propriu (nenul) și orice număr nenul aparținînd spectrului este un număr propriu.*

Demonstrație. Dacă U este nul, atunci numărul zero și numai acest număr este un număr propriu.

Vom presupune că U este nenul. Fie $0 \neq \lambda \in \mathscr{S}(U)$. Cu corolarul 4.2.1 există un șir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathfrak{X}$ cu $\|x_n\| = 1$ așa ca

$$\lim_n (U(x_n) - \lambda x_n) = 0$$

Operatorul U fiind compact există un subșir $\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ al șirului $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ așa ca șirul $\{U(x_{k_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent. Fie

$$y = \lim_n U(x_{k_n})$$

Avem

$$\lim_n x_{k_n} = \lim_n \frac{1}{\lambda}(U(x_{k_n}) - (U(x_{k_n}) - \lambda x_{k_n})) = \frac{1}{\lambda} y$$

de unde

$$y = \lim_n U(x_{k_n}) = U\left(\frac{1}{\lambda} y\right) = \frac{1}{\lambda} U(y),$$

adică $U(y) = \lambda y$. Elementul y este nenul, deoarece din $\|x_n\| = 1$ rezultă $\|\lambda^{-1} y\| = 1$ Deci λ este un număr propriu.

Să observăm acum că, U fiind nenul, cel puțin unul din numerele ω_U, Ω_U este nenul. Cum $\omega_U, \Omega_U \in \mathscr{S}(U)$ (teorema 4.2.3), cel puțin unul dintre aceste numere este un număr propriu.

Observație. Din teorema 4.3.1 rezultă că, pentru un operator autoadjunct compact un număr $\lambda \neq 0$ este sau propriu, sau regulat.

Exercițiu. Să se arate că dacă U este un operator autoadjunct compact pe $\mathfrak{X}$, atunci pentru orice număr $\mu > 0$ există numai un număr finit de numere proprii λ cu $|\lambda| \geqslant \mu$. Deci $\mathscr{P}(U)$ este cel mult numărabilă.

4.3. ECUAȚII OPERATORIALE

Să considerăm ecuația

$$(U - \lambda I)(x) = z \tag{4.4}$$

unde U este un operator autoadjunct compact pe spațiul Hilbert $\mathfrak{X}$, λ un număr nenul, iar z un element dat. Ecuația omogenă corespunzătoare este

$$(U - \lambda I)(x) = 0 \tag{4.5}$$

Teorema 4.3.1. *Pentru ca ecuația* (4.4) *să aibă soluție unică, este necesar și suficient ca ecuația omogenă* (4.5) *să aibă numai soluția nulă. Dacă* $\lambda \in \mathscr{P}(U)$, *atunci ecuația* (4.4) *are soluție dacă și numai dacă* $z \in \mathscr{E}_\lambda(U)^\perp$.

Demonstrație. În baza teoremei 4.2.3, avem sau $\lambda \in \mathscr{R}(U)$ sau $\lambda \in \mathscr{P}(U)$. Dacă $\lambda \in \mathscr{R}(U)$ atunci $\mathfrak{X}_\lambda(U) = \mathfrak{X}$ iar $(U - \lambda I)^{-1}$ există. Ecuația (4.4) are soluție unică pentru orice $z \in \mathfrak{X}$, iar ecuația (4.5) are numai soluție nulă.

Fie acum $\lambda \in \mathscr{P}(U)$ și $\mathscr{E}_\lambda = \mathscr{E}_\lambda(U)$. Subspațiul $\mathscr{E}_\lambda^\perp$ este invariant pentru U iar pentru restricția lui U la $\mathscr{E}_\lambda^\perp$ numărul λ nefiind propriu, va fi regulat. Rezultă că ecuația (4.4) are soluție pentru orice $z \in \mathscr{E}_\lambda^\perp$. Pentru un element oarecare $x \in \mathfrak{X}$ avem

$$x = x_1 + x_2, \quad (x_1 \in \mathscr{E}_\lambda\,;\ x_2 \in \mathscr{E}_\lambda^\perp)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$(U-\lambda I)(x)=(U-\lambda I)(x_1)+(U-\lambda I)(x_2)=(U-\lambda I)(x_2)\in\mathcal{E}_\lambda^\perp$$

deci ecuația (4.4) are soluție numai pentru $z\in\mathcal{E}_\lambda^\perp$.

Dacă x este o soluție a ecuației (4.4) iar $v\in\mathcal{E}_\lambda$ atunci și $x+v$ este o soluție, după cum se observă imediat.

Teorema este demonstrată.

Teorema se poate aplica, în particular, la ecuații integrale.

Să considerăm o ecuație integrală de forma

$$x(s)=\mu\int_0^1\varphi(s,t)x(t)\mathrm{d}t+v(s) \tag{4.6}$$

unde φ este o funcție reală continuă pe $[0,1]\times[0,1]$ simetrică (adică $\varphi(s,t)=\varphi(t,s)$, $\forall s,t\in[0,1]$) iar v este o funcție reală de pătrat integrabil definită pe $[0,1]$.

Am văzut mai înainte că operatorul

$$U:\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([0,1])\to\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([0,1])$$

dat de

$$y=U(x)\Leftrightarrow y(s)=\int_0^1\varphi(s,t)x(t)\mathrm{d}t$$

este un operator autoadjunct (a se vedea secțiunea 3.3) și compact (Cap. IV, secțiunea 3.2).

Ecuația (4.6) se poate scrie sub forma

$$x=\mu U(x)+v$$

și deci (notînd $\lambda=\mu^{-1}$ și $z=-\mu^{-1}v$), sub forma (4.4).

Se poate aplica teorema precedentă[1].

§ 5. REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERATORILOR AUTOADJUNCȚI

5.1. FAMILII SPECTRALE

Rezultatul principal din acest paragraf va fi reprezentarea unui operator autoadjunct sub forma unei anumite integrale.

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert.

Lema 5.1.1. *Fie U, $V\in\mathcal{A}(\mathfrak{X})$ așa ca $UV=VU$ și $U^2=V^2$. Atunci proiectorul P generat de subspațiul liniar închis*

$$G=\{x\mid U(x)=V(x)\} \tag{5.1}$$

are următoarele proprietăți:

(i) *dacă $W\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ și $W(U-V)=(U-V)W$ atunci $WP=PW$;*

(ii) *$UP=PU$, $VP=PV$;*

[1] Dacă λ este un număr propriu nenul pentru U, atunci numărul $\mu=\lambda^{-1}$ se numește număr caracteristic pentru ecuația (4.6).

Scanned with OKEN Scanner

(iii) $U(x)=0\Rightarrow P(x)=x$;
(iv) $U=(2P-I)V$.

Demonstrație. (i) Dacă $y\in G$ iar W are proprietățile indicate, atunci

$$(U-V)(W(y))=W((U-V)(y))=\mathbf{0}$$

deci $W(y)\in G$. Rezultă $W(P(x))\in G$, $\forall x\in\mathfrak{X}$ deci

$$P(W(P(x)))=W(P(x)),\ \forall x\in\mathfrak{X}$$

adică $PWP=WP$. Analog $PW^*P=W^*P$ și deci

$$PW=(W^*P)^*=(PW^*P)^*=PWP=WP$$

(ii) Rezultă imediat din (i);
(iii) Dacă $U(x)=\mathbf{0}$, atunci

$$\|V(x)\|^2=\langle V(x),\ V(x)\rangle=\langle V^2(x),\ x\rangle=\langle U^2(x),\ x\rangle=0$$

deci $V(x)=\mathbf{0}$. Rezultă $x\in G$, deci $P(x)=x$
(iv) Din egalitățile

$$(U-V)(U+V)=U^2-V^2=O$$

rezultă $(U+V)(x)\in G$, $\forall x\in\mathfrak{X}$, deci

$$P((U+V)(x))=(U+V)(x),\ \forall x\in\mathfrak{X}$$

de unde

$$P(U+V)=U+V \tag{5.2}$$

Subspațiul G fiind invariant pentru $U-V$, subspațiul $G^\perp$ este de asemenea invariant. Dacă $x=x_1+x_2$ cu $x_1\in G$ și $x_2\in G^\perp$, atunci

$$P(U-V)(x)=P(U-V)(x_1)+P(U-V)(x_2)=P(U-V)(x_2)$$

iar $(U-V)(x_2)\in G^\perp$ deci $P(U-V)(x)=\mathbf{0}$, $\forall x\in\mathfrak{X}$. Rezultă $P(U-V)=0$, deci cu (5.2)

$$P((U+V)-(U-V))=U+V$$

de unde

$$U=(2P-I)V.$$

Definiția 5.1.1. *Dacă $U\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ iar V este rădăcină pătrată pozitivă a lui U^2, atunci*[1] *proiectorul P generat de subspațiul G dat de* (5.1) *se numește proiectorul de pozitivitate asociat lui U.*

Teorema 5.1.1. *Dacă $U\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ atunci proiectorul de pozitivitate P asociat lui U are proprietățile:*
(i) *dacă $W\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ și $WU=UW$ atunci $WP=PW$;*
(ii) $U(x)=\mathbf{0}\Rightarrow P(x)=x$;
(iii) $UP\geqslant 0$ și $U(P-I)\geqslant 0$

Demonstrație. Să notăm cu V rădăcina pătrată pozitivă a lui U^2 și fie P proiectorul generat de subspațiul G dat de (5.1). Proprietățile (i) și (ii) din enunțul teoremei rezultă cu proprietățile (i) și (iii) din lema 5.1.1.

[1] Cu metoda de construire a rădăcinii pătrate pozitive (a se vedea demonstrația teoremei 3.5.3) avem $VU^2=U^2V$ și cum $UU^2=U^2U$ rezultă $UV=VU$.

Scanned with OKEN Scanner

Cu proprietatea (iv) din lema 5.1.1 obținem

$$UP=(2P-I)VP=VP\geqslant 0$$

$$U(P-I)=UP-U=VP-(2P-I)V=(I-P)V\geqslant 0.$$

Observație. Din egalitatea

$$U=(2P-I)V$$

din lema 5.1.1 rezultă

$$\frac{1}{2}(U+V)=PV=VP$$

de unde

$$UP=\frac{1}{2}(V+U),\ U(P-I)=\frac{1}{2}(V-U).$$

Dacă P este proiectorul de pozitivitate asociat lui U, se notează

$$U_+=UP,\ U_-=U(P-I)$$

Avem evident

$$U=U_+-U_-$$

Exemplu. Fie $\mathbf{L}^2=\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([-1,+1])$ și să considerăm operatorul U: $\mathbf{L}^2\to\mathbf{L}^2$ dat de $y=U(x)\Leftrightarrow y(t)=tx(t)$, $\forall t\in[-1,1]$. Acest operator este autoadjunct și avem:

$$y=U_+(x)\Leftrightarrow y(t)=\frac{|t|+t}{2}x(t),\ \forall t\in[-1,1]$$

$$y=U_-(x)\Leftrightarrow y(t)=\frac{|t|-t}{2}x(t),\ \forall t\in[-1,1].$$

În ceea ce urmează, vom nota

$$U_\lambda=U-\lambda I$$

pentru orice operator $U\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ și orice număr $\lambda\in\mathbf{R}$.

Definiția 5.1.2. *Dacă $U\in\mathcal{A}_0(\mathfrak{X})$ iar P_λ este proiectorul de pozitivitate asociat lui U_λ, se notează $E^U_\lambda=I-P_\lambda$ iar familia $\{E^U_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ se numește familia spectrală generată de U.*

Teorema 5.1.2. *Familia spectrală generată de un operator autoadjunct U are următoarele proprietăți:*

(i) *dacă $W\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ și $WU=UW$ atunci $WE^U_\lambda=E^U_\lambda W$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$;*

(ii) $E^U_\lambda E^U_\mu=E^U_\mu E^U_\lambda$, $\forall\lambda,\ \mu\in\mathbf{R}$;

(iii) $\lambda<\mu\Rightarrow E^U_\lambda\leqslant E^U_\mu$;

(iv) $\lim\limits_{\substack{\lambda\to\mu\\ \lambda<\mu}} E^U_\lambda(x)=E^U_\mu(x)$, $(\forall x\in\mathfrak{X};\ \forall\mu\in\mathbf{R})$;

(v) $\lambda\leqslant\omega_U\Rightarrow E^U_\lambda=0;\ \lambda>\Omega_U\Rightarrow E^U_\lambda=I$.

Demonstrație.[1] (i) Dacă $W\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ și $WU=UW$ atunci $WU_\lambda=U_\lambda W$ de unde rezultă $WP_\lambda=P_\lambda W$ în baza teoremei 5.1.1 și deci $WE_\lambda=E_\lambda W$.

(ii) Rezultă din (i), deoarece $E_\lambda U=UE_\lambda$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$.

[1] Pentru simplificare vom nota E_λ în loc de E^U_λ.

Scanned with OKEN Scanner

(iii) Fie $\lambda<\mu$ și să considerăm proiectorul

$$P=E_\lambda(I-E_\mu)$$

Avem evident

$$E_\lambda P=P,\ (I-E_\mu)P=P \tag{5.3}$$

Cu definiția lui E_λ avem

$$U_\lambda E_\lambda\leqslant 0,\ U_\mu(I-E_\mu)\geqslant 0 \tag{5.4}$$

Să considerăm un element oarecare $x\in\mathfrak{X}$ și fie $y=P(x)$. Cu (5.3) avem

$$E_\lambda(y)=y,\ (I-E_\mu)(y)=y,$$

iar cu (5.4)

$$\langle U_\lambda(y),\ y\rangle=\langle U_\lambda E_\lambda(y),\ y\rangle\leqslant 0$$

$$\langle U_\mu(y),\ y\rangle=\langle U_\mu(I-E_\mu)(y),\ y\rangle\geqslant 0.$$

Prin scădere obținem

$$(\mu-\lambda)||y||^2\leqslant 0.$$

Cum $\mu-\lambda>0$ rezultă $y=P(x)=\mathbf{0}$ și cum x a fost arbitrar, $P=0$, adică

$$E_\lambda(I-E_\mu)=E_\lambda-E_\lambda E_\mu=0$$

deci $E_\lambda=E_\lambda E_\mu$. De aici rezultă $E_\lambda\leqslant E_\mu$ deoarece[1]

$$E_\mu-E_\lambda=(I-E_\lambda)E_\mu\geqslant 0$$

(a se vedea teorema 3.5.2).

(iv) Fie $\lambda<\mu$ și să notăm

$$E_{\lambda\mu}=E_\mu-E_\lambda$$

Avem

$$E_\mu E_{\lambda\mu}=E_{\lambda\mu} \tag{5.5}$$

de unde rezultă

$$U_\mu E_{\lambda\mu}=U_\mu E_\mu E_{\lambda\mu}\leqslant 0 \tag{5.6}$$

Analog, din

$$(I-E_\lambda)E_{\lambda\mu}=E_{\lambda\mu}$$

rezultă

$$U_\lambda E_{\lambda\mu}=U_\lambda(I-E_\lambda)E_{\lambda\mu}\geqslant 0 \tag{5.7}$$

Din (5.6) și (5.7) se deduce imediat

$$\lambda E_{\lambda\mu}\leqslant UE_{\lambda\mu}\leqslant\mu E_{\lambda\mu} \tag{5.8}$$

Pe de altă parte, dacă $\lambda<\nu<\mu$ atunci

$$||E_\nu(x)-E_\lambda(x)||^2=\langle(E_\nu-E_\lambda)(x),\ x\rangle=\langle E_\nu(x),\ x\rangle-\langle E_\lambda(x),\ x\rangle$$

și cum funcția reală

$$f(\lambda)=\langle E_\lambda(x),\ x\rangle,\ (\lambda\in\mathbf{R})$$

---

[1] Reciproc, dacă $E_\lambda\leqslant E_\mu$ atunci $E_\lambda=E_\lambda E_\mu$ căci

$$E_\lambda=E_\lambda E_\lambda\leqslant E_\lambda E_\mu\leqslant E_\lambda I=E_\lambda$$

Scanned with OKEN Scanner

este monotonă, există $f(\mu-0)$. Rezultă că există

$$E_{\mu-0}(x)=\lim_{\substack{\lambda\to\mu\\ \lambda<\mu}} E_\lambda(x)$$

și se arată cu ușurință că $E_{\mu-0}$ este un proiector.

Notînd

$$E_{\mu-0\mu}=E_\mu-E_{\mu-0}$$

avem

$$\lim_{\substack{\lambda\to\mu\\ \lambda<\mu}} (E_\mu-E_\lambda)(x)=E_{\mu-0\mu}(x).$$

și luînd limita punctuală în (5.8) obținem

$$\mu E_{\mu-0\mu}=UE_{\mu-0\mu}$$

sau

$$U_\mu E_{\mu-0\mu}=0 \tag{5.9}$$

Fie $x\in\mathfrak{X}$ și să punem $y=E_{\mu-0\mu}(x)$. Cu (5.9) avem $U_\mu(y)=\mathbf{0}$ iar cu teorema 5.1.1 deducem $E_\mu(y)=\mathbf{0}$.

Dacă în (5.5) trecem la limita punctuală obținem

$$E_\mu E_{\mu-0\mu}=E_{\mu-0\mu}$$

și deci

$$E_{\mu-0\mu}(x)=E_\mu(E_{\mu-0\mu}(x))=E_\mu(y)=\mathbf{0}$$

Cum x a fost arbitrar, rezultă $E_{\mu-0\mu}=0$ deci $E_{\mu-0}=E_\mu$.

(v) Fie $\lambda<\omega_U$ și să presupunem că $E_\lambda\neq 0$. Există atunci $x\in\mathfrak{X}$ așa ca $E_\lambda(x)\neq\mathbf{0}$. Fie $y=E_\lambda(x)$. Atunci $E_\lambda(y)=y$ și putem evident presupune că $||y||=1$. Din $U_\lambda E_\lambda\leqslant 0$ rezultă

$$\langle U(y),\ y\rangle-\lambda=\langle(U-\lambda I)(y),\ y\rangle=\langle U_\lambda E_\lambda(y),\ y\rangle\leqslant 0$$

deci

$$\langle U(y),\ y\rangle\leqslant\lambda<\omega_U$$

ceea ce este contradictoriu. Rezultă $E_\lambda=0$ pentru $\lambda<\omega_U$ și cu proprietatea (iv) obținem și $E_{\omega_U}=0$.

În mod analog se arată că $E_\lambda=I$ pentru $\lambda>\Omega_U$.

Exercițiu. Fie $\mathbf{L}^2=\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([-1,1])$ și operatorul autoadjunct $U:\mathbf{L}^2\to\mathbf{L}^2$ dat de $y=U(x)\Leftrightarrow y(t)=tx(t)$, $\forall t\in[-1,1]$.

Să se construiască familia spectrală generată de U.

5.2. REPREZENTAREA INTEGRALĂ

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Banach.

Fie $T=[\alpha,\beta]$ un interval al dreptei reale și să considerăm două funcții $f:T\to\Gamma$ și $g:T\to\mathcal{L}(\mathfrak{X})$.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm o diviziune D a intervalului T

$$\alpha=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n=\beta$$

și punctele intermediare $\xi_j\in[\lambda_j,\ \lambda_{j+1}]$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,n-1)$

Să notăm

$$S_D=\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(g(\lambda_{j+1})-g(\lambda_j)) \tag{5.10}$$

Fie $\nu(D)$ norma diviziunii D, adică

$$\nu(D)=\max_{j=0}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)$$

Dacă există $V\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ astfel ca, oricare ar fi șirul de diviziuni $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\nu(D_n)\to 0$ să avem

$$V=\lim_n S_{D_n}$$

(unde S_{D_n} este suma de forma (5.10) asociată lui D_n iar punctele intermediare în fiecare sumă S_{D_n} fiind alese în mod arbitrar), atunci se notează

$$V=\int_\alpha^\beta f(\lambda)\mathrm{d}g(\lambda) \tag{5.11}$$

Vom considera cazul cînd $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert iar $g(\lambda)=E_\lambda^U$ pentru un anumit operator $U\in\mathcal{A}(\mathfrak{X})$.

Teorema 5.2.1. *Orice operator autoadjunct U pe spațiul Hilbert $\mathfrak{X}$ se reprezintă sub forma*

$$U=\int_{\omega_U}^{\Omega_U+\varepsilon}\lambda\mathrm{d}E_\lambda^U \tag{5.12}$$

unde numărul $\varepsilon>0$ este arbitrar.

Demonstrație. Să notăm $\omega=\omega_U$, $\Omega=\Omega_U$, $E_\lambda=E_\lambda^U$. Fie $\varepsilon>0$ arbitrar și să considerăm o diviziune D a intervalului $[\omega,\ \Omega+\varepsilon]$ cu ajutorul punctelor λ_j, $(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Fie ξ_j, $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ puncte intermediare. Să notăm

$$F_j=E_{\lambda_{j+1}}-E_{\lambda_j}.$$

Cu (5.7) putem scrie

$$\lambda_jF_j\leqslant UF_j\leqslant\lambda_{j+1}F_j \tag{5.13}$$

Deoarece

$$\sum_{j=0}^{n-1}F_j=I$$

din (5.13) rezultă

$$\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_jF_j\leqslant U\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_{j+1}F_j: \tag{5.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notînd

$$S_D = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j F_j ,$$

din (5.14) rezultă

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j - \xi_j) F_j \leqslant U - S_D \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \xi_j) F_j$$

de unde

$$-\nu(D) I \leqslant U - S_D \leqslant \nu(D) I$$

Aceasta înseamnă

$$-\nu(D) \langle x,\ x\rangle \leqslant \langle (U - S_D)(x),\ x\rangle \leqslant \nu(D) \langle x,\ x\rangle$$

sau

$$|\langle (U - S_D)(x),\ x\rangle| \leqslant \nu(D) \|x\|^2$$

de unde rezultă

$$\|U - S_D\| \leqslant \nu(D).$$

Are deci loc (5.12).

Observații. (1) Din teorema 5.2.1. rezultă că pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ are loc egalitatea

$$U(x) = \int_{\omega_U}^{\Omega_U + \varepsilon} \lambda \, dE_\lambda^U(x)$$

unde integrala din membrul drept se definește ca și integrala (5.11) funcția g avînd însă valori în $\mathfrak{X}$.

Se deduce de asemenea că pentru orice $x \in \mathfrak{X}$, are loc egalitatea

$$\langle U(x),\ x\rangle = \int_{\omega_U}^{\Omega_U + \varepsilon} \lambda \, d \langle E_\lambda^U(x),\ x\rangle$$

unde în membrul drept este o integrală obișnuită de tip Stieltjes.

(2) Din teorema precedentă și din definiția integralei se deduce imediat că pentru orice număr real λ_0

$$U - \lambda_0 I = \int_{\omega_U}^{\Omega_U + \varepsilon} (\lambda - \lambda_0) \, dE_\lambda^U .$$

Se poate de asemenea verifica următoarea egalitate

$$U^n = \int_{\omega_U}^{\Omega_U + \varepsilon} \lambda^n \, dE_\lambda^U$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

ALGEBRE NORMATE

O algebră este un spaţiu liniar în care este definită şi o operaţie de înmulţire între elemente. Algebrele normate au fost introduse în anul 1936 de M. Nagumo. Rezultatele cele mai importante ale teoriei algebrelor normate şi anume cele bazate pe noţiunea de „ideal" pornesc de la cercetările ulterioare ale lui I. M. Ghelfand. Prezentul capitol conţine numai cîteva rezultate fundamentale din teoria algebrelor Banach comutative.

§ 1. ALGEBRE

1.1. DEFINIŢII ŞI EXEMPLE

Definiţia 1.1.1. *Se numeşte algebră, un spaţiu liniar* $\mathfrak{X}$ *pentru care s-a dat o aplicaţie* $(x, y) \to xy$ *a lui* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ *în* $\mathfrak{X}$ (numită operaţie de înmulţire între elemente) cu următoarele proprietăţi[1]:

(1) $(xy)z = x(yz)$ (*asocialivitate*)

(2) $\begin{cases} x(y+z) = xy + xz \\ (y+z)x = yx + zx \end{cases}$ (*distributivitate faţă de adunare*)

(3) $(\alpha x)(\beta y) = (\alpha\beta)(xy), \qquad (\forall \alpha, \beta \in \Gamma;\ \forall x, y \in \mathfrak{X})$

Elementul xy *se numeşte produsul elementelor* x *şi* y.

O algebră $\mathfrak{X}$ se numeşte *algebră reală* sau *algebră complexă*, după cum $\Gamma = \mathbf{R}$ sau $\Gamma = \mathbf{K}$.

Exemple. (1) Spaţiul liniar $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ este o algebră dacă se consideră înmulţirea obişnuită între funcţii.

(2) Dacă $\mathfrak{X}$ este un spaţiu liniar normat, atunci mulţimea $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ a operatorilor liniari şi continui care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$ este o algebră în raport cu operaţiile obişnuite.

Definiţia 1.1.2. *Se zice că două elemente* x, y *ale unei algebre* $\mathfrak{X}$ *comută între ele (sau că sînt permutabile) dacă* $xy = yx$.

[1] Notăm ca de obicei prin Γ corpul scalarilor.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în algebra $\mathfrak{X}$ înmulțirea elementelor este comutativă (adică $xy=yx$, $\forall x, y\in\mathfrak{X}$) atunci $\mathfrak{X}$ se numește *algebră comutativă*.

De exemplu, $\mathbf{C}_\mathbf{r}(T)$ este comutativă dar algebra $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ nu este comutativă.

Definiția 1.1.3. *O submulțime G a unei algebre $\mathfrak{X}$ se numește subalgebră, dacă din $x, y\in G$ rezultă că și elementele $x+y$, αx, xy aparțin lui G ($\forall\alpha\in\Gamma$).*

Dacă $\{G_j\}_{j\in J}$ este o familie de subalgebre ale unei algebre $\mathfrak{X}$, atunci și mulțimea

$$G=\bigcap_{j\in J}G_j$$

este o subalgebră.

Verificarea este imediată.

În particular, dacă E este o submulțime oarecare a unei algebre $\mathfrak{X}$, intersecția tuturor subalgebrelor care conțin mulțimea E este cea mai mică subalgebră conținînd E. Ea se numește *subalgebra generată de E* și se notează $\mathbf{Al}(E)$.

Se verifică cu ușurință că $\mathbf{Al}(E)$ este mulțimea tuturor elementelor de forma

$$x=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j$$

unde fiecare x_j este de forma

$$x_j=a_{j1}a_{j2}\ldots a_{jm_j}$$

cu $a_{ji}\in E$, iar $\lambda_j\in\Gamma$, (numărul n fiind variabil).

Exemplu. Să considerăm algebra $\mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathbf{R})$ și fie

$$E=\{x_n|n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\}$$

unde

$$x_n(t)=e^{int},\quad (t\in\mathbf{R}).$$

Atunci $\mathbf{Al}(E)$ este mulțimea tuturor elementelor $x\in\mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathbf{R})$ care se pot reprezenta sub forma

$$x(t)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{ikt}$$

unde $\lambda_k\in\mathbf{K}$, (iar n este variabil).

Definiția 1.1.4. *Fie $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ două algebre (cu scalari în Γ). Se numește aplicație omomorfă a lui $\mathfrak{X}$ pe $\mathfrak{Y}$, orice aplicație h a lui $\mathfrak{X}$ pe $\mathfrak{Y}$ cu proprietățile: $h(x_1+x_2)=h(x_1)+h(x_2)$; $h(\alpha x)=\alpha h(x)$; $h(x_1x_2)=h(x_1)h(x_2)$. Dacă există o astfel de aplicație, se spune că $\mathfrak{Y}$ este omomorfă lui $\mathfrak{X}$ (sau că $\mathfrak{X}$ se aplică omomorf pe $\mathfrak{Y}$). Dacă există o aplicație omomorfă și biunivocă a lui $\mathfrak{X}$ pe $\mathfrak{Y}$, atunci $\mathfrak{X}$ și $\mathfrak{Y}$ se zic izomorfe (ca algebre).*

1.2. ALGEBRE CU UNITATE

Definiția 1.2.1. *Se numește algebră cu unitate, orice algebră $\mathfrak{X}$ în care există un element u așa ca $ux=xu=x$, $\forall x\in\mathfrak{X}$. Elementul u se numește element unitate.*

Scanned with OKEN Scanner

Într-o algebră cu unitate, elementul unitate este unic. Cînd nu se face nici o altă precizare, elementul unitate va fi notat prin u.

Algebrele $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ și $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ sînt algebre cu unitate.

Exemple de algebre fără unitate vor fi date în paragraful următor.

Definiția 1.2.2. *Într-o algebră cu unitate, un element x se zice inversabil, dacă există un element x' așa ca $xx'=x'x=u$. Elementul x' se numește inversul lui x.*

Inversul unui element este unic și se notează cu x^{-1}.

Propoziția 1.2.1. *Orice algebră $\mathfrak{X}$ fără unitate este izomorfă cu o subalgebră a unei algebre cu unitate.*

Demonstrație. Să notăm $\mathcal{Y}=\Gamma\times\mathfrak{X}$ și să definim în $\mathcal{Y}$ următoarele operații:

$$(\lambda_1,\ x_1)+(\lambda_2,\ x_2)=(\lambda_1+\lambda_2,\ x_1+x_2)$$

$$\alpha(\lambda,\ x)=(\alpha\lambda,\ \alpha x)$$

$$(\lambda_1,x_1)(\lambda_2,\ x_2)=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_1x_2+\lambda_2x_1+x_1x_2)$$

Atunci $\mathcal{Y}$ devine o algebră în care $(1,\ \mathbf{0})$ este element unitate. Se verifică imediat că submulțimea

$$\mathcal{Y}_0=\{(0,\ x)|x\in\mathfrak{X}\}$$

este o subalgebră a lui $\mathcal{Y}$ și că $\mathfrak{X}$ și $\mathcal{Y}_0$ sînt izomorfe prin aplicația $x\to(0,x)$.

Observație. Dacă notăm $u=(1,\ \mathbf{0})$ și dacă identificăm x cu $(0,\ x)$ atunci putem scrie

$$(\lambda,\ x)=\lambda u+x$$

Se spune că algebra $\mathcal{Y}$ s-a obținut din algebra $\mathfrak{X}$ prin *adăugarea unității*.

1.3. IDEALE

În această secțiune vom considera o algebră $\mathfrak{X}$ care este comutativă și cu unitate.

Definiția 1.3.1. *O submulțime E a lui $\mathfrak{X}$ se numește ideal dacă are proprietățile:*

(i) $x,\ y\in E\Rightarrow x+y\in E$;

(ii) $a\in E\Rightarrow ax\in E,\ \forall x\in\mathfrak{X}$.

Dacă E este un ideal și $E\neq\{\mathbf{0}\}$ atunci E se numește ideal nenul, iar dacă $E\neq\mathfrak{X}$ atunci E se numește ideal propriu.

Un ideal este în particular un subspațiu liniar.

Exemplu. Să considerăm algebra $\mathbf{C}_K(T)$ și fie $T_0\subset T$. Atunci mulțimea

$$E=\{x\in\mathbf{C}_K(T)|x(t)=0,\ \forall t\in T_0\}$$

este un ideal.

Propoziția 1.3.1. *Un element $a\in\mathfrak{X}$ este inversabil, dacă și numai dacă nu aparține niciunui ideal propriu.*

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Dacă există a^{-1} și E este un ideal așa ca $a \in E$ atunci pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ avem $x = a(a^{-1}x) \in E$ deci $E = \mathfrak{X}$. Reciproc, dacă a nu este inversabil, atunci punînd

$$E = \{ax | x \in \mathfrak{X}\}$$

mulțimea E este un ideal propriu și $a \in E$.

Corolar 1.3.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ nu conține ideale proprii nenule, atunci $\mathfrak{X}$ este un corp.*

Definiția 1.3.2. *Un ideal propriu E se numește ideal maximal, dacă din $E \subset E'$, unde E' este un ideal propriu, rezultă $E = E'$.*

Exemplu. În algebra $\mathbf{C}_K(T)$ unde T este un segment al dreptei reale, o mulțime E este un ideal maximal, dacă și numai dacă există $t_0 \in T$ astfel ca:

$$E = \{x \in \mathbf{C}_K(T) | x(t_0) = 0\} \tag{1.1}$$

Într-adevăr, mulțimea (1.1) este evident un ideal. Fie E' un ideal așa ca $E \subset E'$ dar $E \neq E'$. Fie deci $y \in E'$ așa ca $y \notin E$. În particular, $y(t_0) \neq 0$. Fie $z \in \mathbf{C}_K(T)$ și să notăm $\alpha = z(t_0)(y(t_0))^{-1}$. Din

$$z = \alpha y + (z - \alpha y)$$

rezultă $z \in E'$ (căci $\alpha y \in E'$ iar $z - \alpha y \in E$). Deci $E' = \mathbf{C}_K(T)$ ceea ce arată că E este maximal.

Reciproc, fie E un ideal maximal în $\mathbf{C}_K(T)$. Să presupunem că pentru orice $t_0 \in T$ există $x_{t_0} \in E$ așa ca $x_{t_0}(t_0) \neq 0$. Funcția x_{t_0} fiind continuă, există un interval S_{t_0} conținînd t_0 așa ca $|x_{t_0}(t)| > \lambda_0 > 0$, $\forall t \in S_{t_0}$. Deoarece T este compact, există intervalele $S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}$ care acoperă T, așa ca $t_j \in S_{t_j}$ iar

$$|x_{t_j}(t)| > \lambda_{t_j} > 0 \quad (\forall t \in S_{t_j}).$$

Punînd

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} |x_{t_j}(t)|^2$$

avem $x \in E$ (deoarece $|x_{t_j}(t)|^2 = x_{t_j}(t)\overline{x_{t_j}(t)}$ iar $x_{t_j} \in E$. Pe de altă parte

$$x(t) > \min_{j=1}^{n} \lambda_{t_j}^2 > 0$$

și deci funcția $y(t) = (x(t))^{-1}$ este continuă pe T. Elementul x al algebrei $\mathbf{C}_K(T)$ este deci inversabil, deși $x \in E$, ceea ce este contradictoriu. Am arătat astfel că există $t_0 \in T$ așa ca $x(t_0) = 0$, $\forall x \in E$ deci E este dat de (1.1).

Propoziția 1.3.2. *Orice ideal propriu este conținut într-un ideal maximal.*

Demonstrație. Fie E un ideal propriu și să notăm cu $\mathscr{E}$ mulțimea tuturor idealelor proprii care conțin E. Mulțimea $\mathscr{E}$ ordonată prin incluziune verifică condiția teoremei lui Zorn. Într-adevăr, dacă $\{E_j\}_{j \in J}$ este un sistem total ordonat de elemente din $\mathscr{E}$, atunci mulțimea $F = \bigcup_{j \in J} E_j$ este un ideal care conține E și care este propriu, deoarece nu conține elementul unitate.

Corolar 1.3.2. *Un element $a \in \mathfrak{X}$ este inversabil, dacă și numai dacă nu aparține nici unui ideal maximal. Dacă $\mathfrak{X}$ nu are ideale maximale nenule, atunci $\mathfrak{X}$ este un corp.*

Scanned with OKEN Scanner

Dacă E este un ideal în algebra $\mathfrak{X}$ atunci spaţiul liniar cît $\mathfrak{X}/E$ se poate organiza ca algebră definind produsul elementelor prin

$$\hat{x}\,\hat{y}=\hat{z}\Leftrightarrow xy\sim z$$

(unde $a\sim b\Leftrightarrow a-b\in E$). Ca submulţime a lui $\mathfrak{X}$ avem

$$\hat{x}\,\hat{y}=xy+E$$

Algebra $\mathfrak{X}/E$ se numeşte *algebra cît* (al lui $\mathfrak{X}$ prin E). Această algebră este comutativă şi cu unitate, omomorfă lui $\mathfrak{X}$ prin aplicaţia canonică $x\to\hat{x}$.

Propoziţia 1.3.3. *Dacă E este un ideal în $\mathfrak{X}$, atunci E este maximal dacă şi numai dacă $\mathfrak{X}/E$ este un corp.*

Demonstraţie. Fie E ideal maximal. Dacă ar exista un ideal propriu nenul $G\subset\mathfrak{X}/E$ atunci mulţimea $F=\{x|\hat{x}\in G\}$ ar fi un ideal propriu în $\mathfrak{X}$. În plus $E\subset F$ şi $E\neq F$ ceea ce este contradictoriu. Rezultă că $\mathfrak{X}/E$ este un corp.

Să presupunem acum că E nu este maximal. Fie deci E' un ideal propriu aşa ca $E\subset E'$ şi $E\neq E'$. Imaginea lui E' în $\mathfrak{X}/E$ prin aplicaţia canonică $x\to\hat{x}$ este atunci un ideal propriu nenul, deci $\mathfrak{X}/E$ nu este un corp.

§ 2. ALGEBRE NORMATE

2.1. NOŢIUNEA DE ALGEBRĂ NORMATĂ

Definiţia 2.1.1. *Se numeşte algebră normată, o algebră $\mathfrak{X}$ pe care s-a dat o normă cu proprietatea*

$$\|x_1x_2\|\leqslant\|x_1\|\ \|x_2\|,\ (\forall x_1,\ x_2\in\mathfrak{X})$$

Dacă în plus $\mathfrak{X}$ este complet ca spaţiu normat, atunci $\mathfrak{X}$ se numeşte algebră Banach.

Observaţie. Într-o algebră normată $\mathfrak{X}$, operaţia de înmulţire a elementelor este continuă (ca funcţie de la $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{X}$), adică din $x=\lim_n x_n$ şi $y=\lim_n y_n$ rezultă $xy=\lim_n x_ny_n$

Într-adevăr, aceasta se obţine din inegalitatea

$$\|x_ny_n-xy\|\leqslant\|x_n-x\|\ \|y_n\|+\|x\|\ \|y_n-y\|,$$

Definiţia 2.1.2. *Două algebre normate $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ se zic izomorfe (ca algebre normate) dacă $\mathfrak{X}$ şi $\mathfrak{Y}$ sînt izomorfe ca algebre printr-o aplicaţie h care păstrează şi norma, adică $\|h(x)\|=\|x\|$.*

Teorema 2.1.1. *Orice algebră normată $\mathfrak{X}$ care nu este o algebră Banach, este izomorfă cu o subalgebră a unei algebre Banach.*

Demonstraţie. Vom considera completarea $\tilde{\mathfrak{X}}$ a spaţiului liniar normat $\mathfrak{X}$ (a se vedea Cap. III, secţiunea 2.2).

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\widetilde{x}$ $\widetilde{y} \in \widetilde{\mathfrak{X}}$ și fie $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ șiruri Cauchy de elemente din $\mathfrak{X}$ care definesc pe $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ respectiv. Șirul $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este de asemenea un șir Cauchy, deoarece

$$||x_n y_n - x_m y_m|| \leqslant ||x_n - x_m||\ ||y_n|| + ||x_m||\ ||y_n - y_m||$$

Elementul definit în $\widetilde{\mathfrak{X}}$ de șirul $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ va fi prin definiție produsul elementelor $\widetilde{x}$ și $\widetilde{y}$. (El nu depinde de algebra șirurilor $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ care definesc $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ respectiv). Dacă x este definit de un element x (adică de șirul având toți termenii egali cu x) iar $\widetilde{y}$ este definit de y, atunci $\widetilde{x}\widetilde{y}$ este definit de xy. Se verifică cu ușurință că $\widetilde{\mathfrak{X}}$ este o algebră Banach. Teorema rezultă acum cu cele arătate în Capitolul III, secțiunea 2.2.

Vom considera acum algebre normate cu unitate.

Să observăm mai întîi că dacă o algebră normată are element unitate u, atunci $||u|| \geqslant 1$, deoarece $u = uu$ deci $||u|| \leqslant ||u||\ ||u||$.

Definiția 2.1.3. *Se numește algebră normată unitară orice algebră normată $\mathfrak{X}$ care are element unitate u, iar $||u|| = 1$. Dacă în plus $\mathfrak{X}$ este un spațiu Banach, atunci $\mathfrak{X}$ se numește algebră Banach unitară.*

Teorema 2.1.2. *Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră normată și dacă în $\mathfrak{X}$ există element unitate u, atunci se poate defini pe $\mathfrak{X}$ o normă echivalentă, în raport cu care $\mathfrak{X}$ să fie o algebră normată unitară.*

Demonstrație. Vom pune

$$||x||_1 = \sup\{||xz|| \mid ||z|| \leqslant 1\} \tag{2.1}$$

Pentru orice element $a \in \mathfrak{X}$ avem deci

$$||xa|| \leqslant ||x||_1 ||a|| \tag{2.2}$$

Se verifică imediat că formula (2.1) definește o normă pe $\mathfrak{X}$. Această normă este echivalentă cu norma inițială, căci din $||xz|| \leqslant ||x||\ ||z||$ rezultă $||x||_1 \leqslant ||x||$ și cu (2.2) în care luăm $a = u$ avem

$$||u||^{-1} ||x|| \leqslant ||x||_1 \leqslant ||x||.$$

Avem apoi (ținînd iarăși seama de (2.2))

$$||(xy)z|| = ||x(yz)|| \leqslant ||x||_1 ||yz||$$

și trecînd la marginea superioară pentru $||z|| \leqslant 1$ obținem

$$||xy||_1 \leqslant ||x||_1 ||y||_1.$$

Este apoi evident că $||u||_1 = 1$.

Teorema este demonstrată[1].

Observație. Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră normată fără element unitate, atunci algebra $\mathcal{Y}$ obținută prin adăugarea unității (a se vedea propoziția 1.2.1

[1] Se observă că dacă pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ notăm cu U_x operatorul dat de formula $U_x(z) = xz$, $(z \in \mathfrak{X})$, atunci $||x||_1 = ||U_x||$.

și observația după această propoziție) se organizează ca algebră normată unitară, punînd

$$||\lambda u+x||=|\lambda|+||x||$$

Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră Banach, atunci și $\mathcal{Y}$ este o algebră Banach.

Exemple. (1) Spațiul Banach $\mathbf{C}_{\mathbf{T}}(T)$ este o algebră Banach dacă se consideră produsul obișnuit al funcțiilor.

(2) Fie $\mathcal{B}$ mulțimea tuturor funcțiilor x: $\mathbf{R}\to\mathbf{K}$ de forma

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k e^{ikt},\quad (t\in\mathbf{R})$$

unde γ_k sînt numere complexe iar seria este absolut convergentă. Cu operațiile obișnuite de adunare, înmulțire cu numere și produs între funcții, precum și cu norma

$$||x||=\sum_{k=0}^{\infty}|\gamma_k|$$

mulțimea $\mathcal{B}$ este o algebră Banach.

(3) Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Banach, atunci $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ este o algebră Banach dacă se consideră operațiile obișnuite și norma obișnuită în $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$.

Alte exemple de algebre Banach fac obiectul secțiunii următoare.

2.2. ALGEBRA $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$

Să considerăm mulțimea tuturor funcțiilor măsurabile definite pe dreapta reală, cu valori complexe, care sînt absolut integrabile. Vom nota cu $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$ mulțimea tuturor claselor de echivalență în raport cu relația de echivalență: $x\sim y\Leftrightarrow x(t)=y(t)$, a.p.t. Cu operațiile obișnuite cu clasele (ca și în cazul spațiului $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(T)$ unde T este un segment) mulțimea $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$ este un spațiu liniar[1]. El devine un spațiu Banach dacă se consideră norma

$$||x||=\int_{\mathbf{R}}|x(t)|\mathrm{d}t$$

Vom organiza acest spațiu ca algebră Banach, considerînd ca produs între elemente *convoluția* $x*y$, adică

$$(x*y)(t)=\int_{\mathbf{R}}x(t-s)y(s)\mathrm{d}s \tag{2.3}$$

Convoluția $x*y$ există oricare ar fi $x,\ y\in\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$.

Într-adevăr, x fiind măsurabilă (Lebesgue), funcția $v(t,s)=x(t-s)$ este de asemenea măsurabilă ca funcție de două variabile. Deoarece y este măsurabilă, funcția de două variabile $z(t,s)=x(t-s)y(s)$ este de asemenea măsurabilă.

Folosind teorema lui Fubini[2] se poate arăta că integrala (2.3) există aproape pentru orice t, că $x*y$ este o funcție măsurabilă și absolut integrabilă și că

$$\int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}}x(t-s)y(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t=\int_{\mathbf{R}}x(t)\mathrm{d}t\int_{\mathbf{R}}y(s)\mathrm{d}s \tag{2.4}$$

---

[1] Pentru simplificare, clasa determinată de o funcție x, va fi notată tot cu x.

[2] A se vedea, de exemplu, lucrarea [23] de la Bibliografie .

Deci pentru orice $x, y \in \mathbf{L}_K(\mathbf{R})$ avem $x * y \in \mathbf{L}_K(\mathbf{R})$.

Este evident că

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) * y = \alpha(x_1 * y) + \beta(x_2 * y)$$

Cu teorema lui Fubini deducem, de asemenea, asociativitatea convoluției

$$(x * (y * z))(t) = \int_{\mathbf{R}} x(t-s)\Big(\int_{\mathbf{R}} y(s-\xi)z(\xi)\mathrm{d}\xi\Big)\mathrm{d}s =$$

$$= \int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}} x(t-s)y(s-\xi)\mathrm{d}s\Big)z(\xi)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}} x(t-\xi-s)y(s)\mathrm{d}s\Big)z(\xi)\mathrm{d}\xi = ((x * y) * z)(t)$$

Avem de asemenea

$$(x * y)(t) = \int_{\mathbf{R}} x(t-s)y(s)\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}} x(s)y(t-s)\mathrm{d}s = (y * x)(t)$$

deci convoluția este și comutativă.

În sfîrșit, din (2.4) rezultă

$$\|x * y\| = \int_{\mathbf{R}}\Big|\int_{\mathbf{R}} x(t-s)y(s)\mathrm{d}s\Big|\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}} |x(t-s)||y(s)|\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t = \|x\|\,\|y\|.$$

Deci $\mathbf{L}_K(\mathbf{R})$ este o algebră Banach comutativă dacă se ia ca produs convoluția funcțiilor.

Această algebră nu are unitate.

Pentru aceasta să observăm mai întîi că dacă y este o funcție măsurabilă și mărginită pe dreapta reală iar x este o funcție absolută integrabilă, atunci $x * y$ este o funcție continuă.

Într-adevăr, dacă $|y(t)| \leqslant \lambda$ atunci

$$|(x * y)(t) - (x * y)(t_0)| \leqslant \lambda \int_{\mathbf{R}} |x(t-s) - x(t_0-s)|\mathrm{d}s =$$

$$= \lambda \int_{\mathbf{R}} |x(t+s-t_0) - x(s)|\mathrm{d}s.$$

Dacă x este continuă și este nulă în afara unui interval finit, atunci funcția x este uniform continuă și ultima integrală tinde evident la zero cînd $t \to t_0$.

Dacă x este o funcție absolut integrabilă oarecare, atunci același lucru se deduce ținînd seama că mulțimea elementelor reprezentate de funcții continue care sînt nule în afara unui interval finit (care depinde de fiecare funcție) este densă în $\mathbf{L}_K(\mathbf{R})$.

Dacă ar exista un element unitate u în $\mathbf{L}_K(\mathbf{R})$, atunci din $x(t) = (u * x)(t)$ ar rezulta că dacă x este absolut integrabilă și mărginită atunci x este continuă, ceea ce este absurd.

Deci $\mathbf{L}_K(\mathbf{R})$ nu are element unitate.

Scanned with OKEN Scanner

Este evident că putem considera completarea lui $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$ pînă la o algebră Banach unitară adică putem considera algebra Banach a elementelor de forma

$$v=\lambda u+x, \quad (\lambda\in\mathbf{K};\ x\in\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}))$$

$$||v||=|\lambda|+\int_{\mathbf{R}}|x(t)|\mathrm{d}t.$$

unde u este elementul unitate „adăugat".

Complemente și exerciții. (1) Fie w: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o funcție continuă care are proprietățile: $w(t)>0$, $\forall t\in\mathbf{R}$; $w(t_1+t_2)\leqslant w(t_1)w(t_2)$, $\forall t_1, t_2\in\mathbf{R}$. Pentru orice funcție x: $\mathbf{R}\to\mathbf{K}$ vom nota cu x_w funcția $x\ (t)=x(t)w(t)$. Vom nota cu $\mathbf{L}^w_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$ mulțimea tuturor claselor de funcții măsurabile x: $\mathbf{R}\to\mathbf{K}$ pentru care x este absolut integrabilă. Cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire cu numere, considerînd convoluția pentru produsul elementelor, precum și norma

$$||x||=\int_{\mathbf{R}}|x(t)|w(t)\mathrm{d}t,$$

mulțimea $\mathbf{L}^w_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$ este o algebră normată.

(2) Fie $\mathbf{R}_+=[0, +\infty)$ și să considerăm spațiul liniar $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}_+)$ definit ca și spațiul liniar $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$. Să definim produsul elementelor cu ajutorul formulei

$$(x*y)(t)=\int_0^t x(t-s)y(s)\mathrm{d}s, \quad (t\in\mathbf{R}_+)$$

și să considerăm norma dată de formula

$$||x||=\int_{\mathbf{R}_+}|x(t)|\mathrm{d}t$$

Atunci $\mathbf{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}_+)$ este o algebră normată.

(3) Să se construiască algebra normată asemănătoare celei din exercițiul (2), înlocuindu-se $[0, +\infty)$ printr-un segment $[0, \theta]$ și să se studieze proprietățile sale.

2.3. ELEMENTE INVERSABILE ÎN ALGEBRE BANACH UNITARE

În această secțiune vom considera algebre Banach unitare.

Elementul unitate va fi notat cu u.

Lema 2.3.1. *Într-o algebră Banach unitară $\mathfrak{X}$, elementele sferei $S(u; 1)$ sînt inversabile, iar funcția f: $S(u; 1)\to\mathfrak{X}$ dată de formula $f(x)=x^{-1}$ este continuă în punctul u.*

Demonstrație. Dacă $x\in S(u; 1)$ atunci notînd $y=x-u$ avem $||y||<1$. Rezultă că seria cu termenul general $(-1)^n y^n$ este absolut convergentă. Punînd

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n$$

Scanned with OKEN Scanner

unde notăm $y^0=u$ și $y^1=y$ avem

$$z=u-y\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n\right)=u-yz$$

deci

$$xz=(u+y)z=u$$

Analog, din

$$z=u-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n\right)y=u-zy$$

se deduce $zx=u$. Deci x este inversabil și $z=x^{-1}$.

Din egalitatea $z=u-yz$ obținută mai înainte rezultă:

$$||x^{-1}-u||=||z-u||\leqslant||y||\,||z|| \tag{2.5}$$

Pe de altă parte

$$||z||\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}||y||^n=\frac{1}{1-||y||} \tag{2.6}$$

Deoarece $y=x-u$, din (2.5) și (2.6) rezultă

$$||x^{-1}-u||\leqslant\frac{||x-u||}{1-||x-u||}$$

și lema este demonstrată.

Teorema 2.3.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră Banach unitară, atunci mulțimea $\mathscr{I}$ a elementelor inversabile este deschisă iar funcția $f:\mathscr{I}\to\mathfrak{X}$ dată de formula $f(x)=x^{-1}$ este continuă.*

Demonstrație. Fie $x_0\in\mathscr{I}$ și $x\in S(x_0;\eta)$ unde $\eta=||x^{-1}||^{-1}$. Avem $xx_0^{-1}\in S(u;1)$ deoarece

$$||xx_0^{-1}-u||=||(x-x_0)x_0^{-1}||\leqslant||x-x_0||\,||x_0^{-1}||<\eta||x_0^{-1}||=1$$

În baza lemei precedente, există $(xx_0^{-1})^{-1}$ și

$$x(x_0^{-1}(xx_0^{-1})^{-1})=(xx_0^{-1})(xx_0^{-1})^{-1}=u \tag{2.7}$$

Pe de altă parte

$$(xx_0^{-1})^{-1}(xx_0^{-1})=u$$

de unde

$$(xx_0^{-1})^{-1}x=x_0$$

și deci

$$x_0^{-1}(xx_0^{-1})x=u \tag{2.8}$$

Din (2.7) și (2.8) rezultă că $x\in\mathscr{I}$ și

$$x^{-1}=x_0^{-1}(xx_0^{-1})^{-1}$$

Deoarece funcția $y\to y^{-1}$ este continuă în punctul u iar funcția $x\to xx_0^{-1}$ este continuă în punctul x_0, rezultă că funcția $x\to(xx_0^{-1})^{-1}$ este continuă în punctul x_0. Deci funcția $x\to x_0^{-1}(xx_0^{-1})^{-1}$ adică f este continuă în x_0.

Scanned with OKEN Scanner

Observații. (1) În lema 2.3.1 s-a arătat că dacă $||y||<1$ atunci $u+y$ este inversabil și

$$(u+y)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n$$

unde $y^0=u$, iar seria este absolut convergentă. Înlocuind y prin $-y$ rezultă

$$(u-y)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}y^n \tag{2.9}$$

pentru $||y||<1$.

(2) Fie $\mathfrak{X}$ o algebră Banach complexă unitară și $x\in\mathfrak{X}$. Dacă există x^{-1} atunci pentru orice $\lambda\in\mathbf{K}$ putem scrie

$$x-\lambda u=x(u-\lambda x^{-1}).$$

Dacă $|\lambda|\,||x^{-1}||<1$, atunci există $(u-\lambda x^{-1})^{-1}$ și are loc egalitatea

$$(u-\lambda x^{-1})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x^{-n} \tag{2.10}$$

Există atunci $(x-\lambda u)^{-1}$ și avem

$$(x-\lambda u)^{-1}=(u-\lambda x^{-1})^{-1}x^{-1}$$

iar cu (2.10)

$$(x-\lambda u)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x^{-n-1} \tag{2.11}$$

Fie acum $\lambda_0\in\mathbf{K}$, să notăm $x_0=x-\lambda_0 u$ și să presupunem că există x_0^{-1}. Avem

$$x-\lambda u=x_0-(\lambda-\lambda_0)u$$

și dacă

$$|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{||x_0^{-1}||} \tag{2.12}$$

atunci înlocuind λ prin $\lambda-\lambda_0$ și x prin x_0 în (2.11) obținem

$$(x-\lambda u)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n x_0^{-n-1}, \tag{2.13}$$

seria din membrul drept fiind absolut convergentă.

Definiția 2.3.1. *Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră Banach unitară, iar $x\in\mathfrak{X}$, se numește spectrul lui x și se notează $\mathcal{S}(x)$, mulțimea numerelor $\lambda\in\Gamma$ pentru care elementul $x-\lambda u$ nu este inversabil*[1].

Teorema 2.3.2. *Într-o algebră Banach complexă unitară $\mathfrak{X}$, spectrul unui element oarecare este nevid.*

[1] Mulțimea numerelor $\lambda\in\Gamma$ pentru care există $(x-\lambda u)^{-1}$ se numește *rezolvanta* lui x.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $x \in \mathfrak{X}$ și să presupunem că pentru orice $\lambda \in \mathbf{K}$ elementul $x - \lambda u$ ar fi inversabil. Pentru orice $f \in \mathfrak{X}^*$ să punem

$$g(\lambda) = f((x-\lambda u)^{-1}), \quad (\lambda \in \mathbf{K}) \tag{2.14}$$

Funcția g este olomorfă în tot planul, observînd că dacă λ satisface (2.12) atunci cu (2.13) avem

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n f(x_0^{-n-1}).$$

Pe de altă parte, pentru $|\lambda| \geqslant 2||x||$ avem

$$||(x-\lambda u)^{-1}|| \leqslant \frac{1}{||x||} \tag{2.15}$$

Într-adevăr, cu (2.10)

$$(x-\lambda u)^{-1} = -\lambda^{-1}(u-\lambda^{-1}x)^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n$$

de unde rezultă

$$||(x-\lambda u)^{-1}|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-n-1} ||x||^n = \frac{1}{|\lambda| - ||x||} \leqslant \frac{1}{||x||}$$

adică (2.15). Deci dacă $|\lambda| \geqslant 2||x||$ atunci

$$|g(\lambda)| \leqslant \frac{||f||}{||x||}$$

În concluzie, funcția g este olomorfă și mărginită în tot planul și deci este constantă (în baza cunoscutei teoreme a lui Liouville). Pe de altă parte, deoarece $x^{-1} \neq (x-u)^{-1}$, există $f \in \mathfrak{X}^*$ așa ca $f(x^{-1}) \neq f(x-u)^{-1})$. Considerînd funcția g asociată lui f prin formula (2.14) avem deci $g(0) \neq g(1)$ ceea ce contrazice faptul că g este constantă. Prin urmare există $\lambda \in \mathscr{S}(x)$.

2.4. ALGEBRE NORMATE CÎT

Fie $\mathfrak{X}$ o algebră normată unitară, comutativă.

Dacă E este un ideal (propriu) închis al lui $\mathfrak{X}$, atunci E este în particular un subspațiu liniar închis. Putem deci considera spațiul cît $\mathfrak{X}/E$ care este un spațiu liniar normat cu norma

$$||\hat{x}|| = \inf_{x' \in \hat{x}} ||x'|| \quad (\hat{x} \in \mathfrak{X}/E)$$

Pe de altă parte, $\mathfrak{X}/E$ este o algebră (comutativă) dacă definim $\hat{x}\hat{y}$ ca fiind clasa care conține xy. Clasa $\hat{u}$ care conține u este element unitate.

Pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există $x_0 \in \hat{x}$ și $y_0 \in \hat{y}$ așa ca

$$||x_0|| < ||\hat{x}|| + \varepsilon, \quad ||y_0|| < ||\hat{y}|| + \varepsilon$$

Rezultă

$$||\widehat{xy}|| \leqslant ||x_0 y_0|| \leqslant ||x_0||\,||y_0|| < (||\hat{x}|| + \varepsilon)(||\hat{y}|| + \varepsilon)$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum ε a fost arbitrar

$$\|\widehat{xy}\| \leqslant \|\hat{x}\|\,\|\hat{y}\|.$$

Deci $\mathfrak{X}/E$ este o algebră normată.

Avem de asemenea $\|\mathbf{u}\| = 1$. Într-adevăr, deoarece $\hat{u}$ este element unitate, avem $\|\hat{u}\| \geqslant 1$, iar cu definiția normei în $\mathfrak{X}/E$ avem $\|\hat{u}\| \leqslant \|u\| = 1$.

Deci $\mathfrak{X}/E$ este o algebră normată unitară.

Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră Banach, atunci și $\mathfrak{X}/E$ este o algebră Banach.

§ 3. REPREZENTAREA ALGEBRELOR BANACH

În acest paragraf vom da unele teoreme privind reprezentarea algebrelor Banach complexe, comutative, unitare.

3.1. CORP BANACH

Teorema 3.1.1. (*I. M. Ghelfand — S. Mazur*). *Fie $\mathfrak{X}$ o algebră Banach complexă, unitară. Dacă $\mathfrak{X}$ este un corp atunci $\mathfrak{X}$ este izomorfă cu algebra Banach* **K** *a numerelor complexe.*

Demonstrație. În baza teoremei 2.3.2, pentru orice element $x \in \mathfrak{X}$, există $\lambda \in \mathbf{K}$ astfel ca elementul $x - \lambda u$ să nu fie inversabil. Dacă $\mathfrak{X}$ este un corp, atunci $x - \lambda u = \mathbf{0}$, deci $x = \lambda u$. Corespondența $\lambda u \to \lambda$ este un izomorfism între algebrele normate $\mathfrak{X}$ și **K**.

Corolar 3.1.1. *Fie $\mathfrak{X}$ o algebră Banach complexă comutativă, unitară. Dacă E este un ideal maximal în $\mathfrak{X}$ atunci algebra Banach $\mathfrak{X}/E$ este izomorfă cu algebra Banach* **K** *a numerelor complexe.*

Într-adevăr, în baza propoziției 1.3.3, $\mathfrak{X}/E$ este un corp.

O algebră Banach care este un corp, se numește *corp Banach.*

Izomorfismul $\lambda u \to \lambda$ dintre un corp Banach (complex) $\mathfrak{X}$ și corpul **K** al numerelor complexe, se numește *izomorfismul canonic.*

Observație. Se poate demonstra că dacă într-o algebră Banach complexă, unitară $\mathfrak{X}$, norma satisface condiția

$$\|xy\| = \|x\|\,\|y\|, \quad (\forall\, x, y \in \mathfrak{X})$$

atunci $\mathfrak{X}$ este un corp.

3.2. SPAȚIUL CARACTERELOR

Fie $\mathfrak{X}$ o algebră Banach complexă, comutativă unitară.

Definiția 3.2.1. *Se numește caracter al lui $\mathfrak{X}$ orice funcțională liniară, nenulă f pe $\mathfrak{X}$ care satisface condiția*

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2), \quad (\forall\, x_1, x_2 \in \mathfrak{X}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă f este un caracter al lui $\mathfrak{X}$ atunci $f(u)=1$.
Într-adevăr,

$$f(x)=f(xu)=f(x)f(u)$$

și se poate considera un element x așa ca $f(x)\neq 0$.

Vom nota cu $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ mulțimea tuturor idealelor maximale ale lui $\mathfrak{X}$ și cu $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ mulțimea tuturor caracterelor lui $\mathfrak{X}$.

Propoziția 3.2.1. *Aplicația* $f\to f^{-1}(0)$ *este o bijecție între mulțimile* $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ *și* $\mathcal{S}(\mathfrak{X})$.

Demonstrație. Mulțimea $E=f^{-1}(0)$ este evident un ideal propriu. Algebra cît $\mathfrak{X}/E$ este izomorfă cu algebra $\mathbf{K}$ a numerelor complexe prin aplicația $\hat{x}\to f(x)$, deci $\mathfrak{X}/E$ este un corp. Cu propoziția 1.3.3, idealul E este maximal.

Reciproc, fie $E\in\mathcal{S}(\mathfrak{X})$ și să considerăm algebra cît $\mathfrak{X}/E$. Vom defini funcționala $f_E:\mathfrak{X}\to\mathbf{K}$ punînd $f_E(x)=\lambda$ dacă $\hat{x}=\lambda\hat{u}$. Se verifică imediat că f_E este un caracter și că $E=f_E^{-1}(0)$. Remarcăm în sfîrșit că dacă $f\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ și $E=f^{-1}(0)$, atunci $f_E=f$.

Propoziția 3.2.2. *Dacă* $f\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ *atunci* $f\in\mathfrak{X}^*$ *și* $\|f\|=1$.

Demonstrație. Dacă $E=f^{-1}(0)$, atunci în algebra cît $\mathfrak{X}/E$ avem $\hat{x}=f(x)\hat{u}$ și deci

$$|f(x)|=\|\hat{x}\|\leqslant\|x\|$$

Rezultă $f\in\mathfrak{X}^*$ și $\|f\|\leqslant 1$. Dar $f(u)=1$, deci $\|f\|=1$.

În ceea ce urmează, vom considera pe mulțimea $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ urma topologiei slabe $\sigma^*=\sigma(\mathfrak{X}^*,\ \mathfrak{X})$.

Dacă $f_0\in\mathfrak{X}^*$, atunci pentru $x_j\in\mathfrak{X}$, $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ și $\varepsilon>0$ vom nota

$$W(f_0;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \varepsilon)=\{f\in\mathfrak{X}^*\,|\,|f(x_j)-f_0(x_j)|<\varepsilon,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Propoziția 3.2.3. *Spațiul topologic* $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ *al caracterelor este compact.*

Demonstrație. Deoarece sfera unitate închisă a spațiului $\mathfrak{X}^*$ este compactă (teorema 2.3.3. din Cap. IV) iar $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ este o submulțime a acestei sfere, rămîne de demonstrat că mulțimea $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ este slab închisă. Fie deci f_0 un punct slab aderent lui $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ și să arătăm că $f_0\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$. Fie $x,\ y\in\mathfrak{X}$ și un număr oarecare $\varepsilon>0$.

Fie

$$W=W(f_0;\ x,\ y,\ xy,\ u;\ \varepsilon)$$

Există $f\in\mathfrak{X}^*$ așa ca $f\in W\cap\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ și avem

$$|f_0(xy)-f_0(x)f_0(y)|\leqslant|f_0(xy)-f(xy)|+|f(x)(f(y)-f_0(y))|+|f_0(y)(f(x)-f_0(x))|\leqslant$$

$$\leqslant(1+\|x\|+|f_0(y)|)\varepsilon$$

și cum ε a fost arbitrar rezultă

$$f_0(xy)=f_0(x)f_0(y)$$

În plus, din

$$|f_0(u)-1|=|f_0(u)-f(u)|<\varepsilon$$

oricare ar fi $\varepsilon>0$ rezultă $f_0(u)=1$. Deci $f_0\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$.

Propoziția este demonstrată.

Scanned with OKEN Scanner

Vom presupune ca și în secțiunea precedentă că $\mathfrak{X}$ este o algebră Banach complexă, comutativă unitară.

Pentru orice $x\in\mathfrak{X}$ vom defini o funcție φ_x: $\mathcal{F}(\mathfrak{X})\to K$ prin formula

$$\varphi_x(f)=f(x),\ (f\in\mathcal{F}(\mathfrak{X}))$$

Vom nota

$$\Phi(\mathfrak{X})=\{\varphi_x|x\in\mathfrak{X}\}.$$

Este evident că

$$\varphi_{x_1+x_2}(f)=\varphi_{x_1}(f)+\varphi_{x_2}(f)$$
$$\varphi_{\alpha x}(f)=\alpha\varphi_x(f)$$
$$\varphi_{x_1x_2}(f)=\varphi_{x_1}(f)\varphi_{x_2}(f)$$
$$\varphi_u(f)=1$$

deci $\Phi(\mathfrak{X})$ este o algebră comutativă cu element unitate (în raport cu operațiile obișnuite cu funcțiile).

Cu propoziția 3.2.2 avem: $|\varphi_x(f)|\leqslant||x||$, $\forall f\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$.

Propoziția 3.3.1. *Un element $x\in\mathfrak{X}$ este inversabil, dacă și numai dacă funcția φ_x nu se anulează.*

Demonstrație. Dacă există x^{-1} și dacă am avea $\varphi_x(f)=0$ pentru un anumit f, atunci x ar aparține idealului maximal $f^{-1}(0)$, ceea ce este contradictoriu. Reciproc, dacă nu există x^{-1}, deci dacă există $E\in\mathcal{E}(\mathfrak{X})$ așa ca $x\in E$, atunci (cu propoziția 3.2.1) există $f\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ pentru care $x\in f^{-1}(0)$. Deci $\varphi_x(f)=0$.

Propoziția 3.3.2. *Pentru orice element $x\in\mathfrak{X}$, mulțimea valorilor funcției φ_x coincide cu spectrul lui x.*

Demonstrație. Dacă $\lambda=\varphi_x(f)$ atunci

$$f(x-\lambda u)=f(x)-\lambda=\varphi_x(f)-\lambda=0$$

deci $x-\lambda u\in f^{-1}(0)$ și prin urmare $x-\lambda u$ nu este inversabil. Reciproc, dacă $x-\lambda u$ nu este inversabil, atunci există $E\in\mathcal{E}(\mathfrak{X})$ așa ca $x-\lambda u\in E$. Dacă $E=f^{-1}(0)$ cu $f\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$, atunci $f(x-\lambda u)=0$ și deci

$$\varphi_x(f)-\lambda=f(x)-\lambda=f(x-\lambda u)=0$$

și propoziția este demonstrată.

Observație. În raport cu topologia considerată pe $\mathcal{F}(\mathfrak{X})$ orice funcție φ_x este continuă. Într-adevăr, dacă $f_0\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})$, atunci pentru $f\in W(f_0;\ x;\ \varepsilon)$ avem

$$|\varphi_x(f)-\varphi_x(f_0)|<\varepsilon$$

Deci $\Phi(\mathfrak{X})$ este o algebră de funcții continue definite pe un spațiu topologic compact.

Teorema 3.3.1. *Pentru orice element x al algebrei Banach complexe comutative unitare $\mathfrak{X}$, are loc egalitatea*

$$\max_{f\in\mathcal{F}(\mathfrak{X})}|\varphi_x(f)|=\lim_n\sqrt[n]{||x^n||} \tag{3.1}$$

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Dacă $x \in \mathfrak{X}$ și $|\lambda| > ||x||$, atunci există $(x-\lambda u)^{-1}$ și are loc egalitatea

$$(x-\lambda u)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n \tag{3.2}$$

Într-adevăr, seria din membrul drept este absolut convergentă (deoarece $||\lambda^{-1}x|| < 1$) iar

$$-(x-\lambda u) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = u$$

Să notăm acum

$$\mu = \max_{f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})} |\varphi_x(f)|$$

Dacă $|\lambda| > \mu$, atunci $\varphi_x(f) \neq \lambda$, $\forall\, f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$, deci

$$\varphi_{x-\lambda u}(f) \neq 0, \quad \forall\, f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$$

și cu propoziția 3.3.1 există $(x-\lambda u)^{-1}$. Pentru $|\lambda| > ||x||$ are loc reprezentarea (3.2). Deci dacă $f \in \mathfrak{X}^*$ și punem

$$g(\lambda) = f((x-\lambda u)^{-1})$$

atunci pentru $|\lambda| > ||x||$ are loc reprezentarea

$$g(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} f(x^n). \tag{3.3}$$

Pe de altă parte, din egalitatea

$$\frac{1}{\alpha}((x-(\lambda+\alpha)u)^{-1} - (x-\lambda u)^{-1}) = (x-(\lambda+\alpha)u)^{-1}(x-\lambda u)^{-1}$$

rezultă

$$\frac{1}{\alpha}(g(\lambda+\alpha) - g(\lambda)) = f((x-(\lambda+\alpha)u)^{-1}(x-\lambda u)^{-1})$$

de unde deducem că funcția g este olomorfă pentru $|\lambda| > \mu$. Deci reprezentarea (3.3) are loc pentru $|\lambda| > \mu$. Pentru orice $f \in \mathfrak{X}^*$ (și $|\lambda| > \mu$) are deci loc egalitatea $\lim_n f(\lambda^{-n}x^n) = 0$ adică șirul $\{\lambda^{-n}x^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este slab convergent către $\mathbf{0}$. În particular rezultă că există $\gamma = \gamma(\lambda) > 0$ așa ca

$$||\lambda^{-n}x^n|| \leqslant \gamma, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Din

$$\sqrt[n]{||x^n||} \leqslant \sqrt[n]{\gamma}\,|\lambda|, (\forall n \in \mathbf{N})$$

rezultă

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{||x^n||} \leqslant |\lambda|$$

Ultima inegalitate avînd loc pentru orice λ pentru care $|\lambda| > \mu$ deducem

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{||x^n||} \leqslant \mu \tag{3.4}$$

Pe de altă parte, din

$$|\varphi_{x^n}(f)| = |\varphi_x(f)|^n$$

rezultă

$$\max_{f \in \mathcal{F}(\mathcal{X})} |\varphi_{x^n}(f)| = \mu^n$$

și cum

$$||x^n|| \geqslant |\varphi_{x^n}(f)|$$

rezultă $\sqrt[n]{||x^n||} \geqslant \mu$ și deci

$$\lim_n \sqrt[n]{||x^n||} \geqslant \mu \tag{3.5}$$

Din (3.4) și (3.5) rezultă (3.1).

3.4. TEOREMA LUI STONE-WEIERSTRASS

Fie T un spațiu topologic compact și să considerăm algebra Banach $\mathbf{C}_\Gamma(T)$ a tuturor funcțiilor continue (reale sau complexe) definite pe T, cu norma obișnuită

$$||\varphi|| = \max_{t \in T} |\varphi(t)|, \quad (\varphi \in \mathbf{C}_\Gamma(T))$$

O mulțime $\mathscr{C}$ de funcții reale sau complexe definite pe T, se spune că *separă punctele* lui T, dacă pentru orice $t_1, t_2 \in T$ cu $t_1 \neq t_2$, există $\varphi \in \mathscr{C}$ așa ca $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$.

În ceea ce urmează, vom nota cu $\mathbf{1}$ funcția: $\mathbf{1}(t) = 1$, $\forall t \in T$.

Lema 3.4.1. *Fie $\mathscr{C}$ o subalgebră a algebrei $\mathbf{C}_\mathbf{R}(T)$ așa ca $\mathbf{1} \in \mathscr{C}$ și care separă punctele lui T. Dacă A și B sînt două submulțimi închise, disjuncte ale lui T, atunci există $\psi \in \overline{\mathscr{C}}$ cu următoarele proprietăți:*

(i) $0 \leqslant \psi(t) \leqslant 1$, $\forall t \in T$;

(ii) $\psi(t) = 1$, $\forall t \in A$;

(iii) $\psi(t) = 0$, $\forall t \in B$.

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că dacă $\varphi, \psi \in \overline{\mathscr{C}}$ atunci funcțiile $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$ date de formulele

$$(\varphi \vee \psi)(t) = \max \{\varphi(t), \ \psi(t)\}$$

$$(\varphi \wedge \psi)(t) = \min \{\varphi(t), \ \psi(t)\}$$

aparțin de asemenea lui $\mathscr{C}$.

Deoarece pentru orice două numere reale α, β au loc egalitățile

$$\max (\alpha, \ \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + |\alpha - \beta|)$$

$$\min (\alpha, \ \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - |\alpha - \beta|)$$

Scanned with OKEN Scanner

este suficient să demonstrăm că dacă $\varphi \in \overline{\mathscr{C}}$, atunci $|\varphi| \in \overline{\mathscr{C}}$ unde $|\varphi|(t) = |\varphi(t)|$. Dar aceasta rezultă din faptul că dacă $|\varphi(t)| \leqslant \mu$, atunci notînd

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_n = \frac{1.3 \ldots (2n-3)}{2.4 \ldots (2n)}, \quad (1 < n \in \mathbb{N})$$

avem

$$|\varphi(t)| = \mu \sqrt{1 - \left(1 - \frac{|\varphi(t)|^2}{\mu^2}\right)} = \mu \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(1 - \frac{|\varphi(t)|^2}{\mu^2}\right)^n\right)$$

seria fiind uniform convergentă.

Fie acum $t_1, t_2 \in T$ cu $t_1 \neq t_2$. Fie $\varphi \in \mathscr{C}$ așa ca $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Să punem

$$\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_2)}{\varphi(t_1) - \varphi(t_2)}$$

Avem $\varphi_0(t_1) = 1$ și $\varphi_0(t_2) = 0$. Deoarece funcția φ_0 este continuă, există o vecinătate $W(t_2)$ a lui t_2 așa ca $\varphi_0(t) < \lambda < 1$ dacă $t \in W(t_2)$. Punînd

$$\psi_0(t) = \min \left\{1, \frac{\max\{0, \varphi_0(t) - \lambda\}}{1 - \lambda}\right\}$$

avem $\psi_0 \in \overline{\mathscr{C}}$ și ψ_0 are următoarele proprietăți:

$$0 \leqslant \psi_0(t) \leqslant 1; \quad \psi_0(t_1) = 1; \quad \psi_0(t) = 0, \quad \forall t \in W(t_2).$$

Să fixăm acum un element $t_1 \in A$. Atunci pentru orice $t_2 \in B$ există $\psi_0 \in \overline{\mathscr{C}}$ cu proprietățile precedente. Mulțimea B fiind compactă (deoarece este închisă iar T compact) există punctele $t_2^1, t_2^2, \ldots, t_2^n$ în B și vecinătățile $W(t_2^1), W(t_2^2), \ldots W(t_2^n)$ care acoperă B, precum și funcțiile $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ din $\overline{\mathscr{C}}$ cu proprietățile: $0 \leqslant \psi_j(t) \leqslant 1$; $\psi_j(t_1) = 1$; $\psi_j(t) = 0$, $\forall t \in W(t_2^j)$. Dacă punem

$$\varphi^*(t) = \min_{j=1}^{n} \psi_j(t)$$

atunci

$$\varphi^* \in \overline{\mathscr{C}}, \quad 0 \leqslant \varphi^*(t) \leqslant 1, \quad \varphi^*(t_1) = 1 \text{ și } \varphi^*(t) = 0, \quad \forall t \in \overline{B}.$$

Funcția φ^* fiind continuă, există o vecinătate $W(t_1)$ a lui t_1 așa ca $\varphi^*(t) > 1 - \mu > 0$, $\forall t \in W(t_1)$ unde $\mu > 0$. Punînd

$$\varphi_0^*(t) = \frac{\min\{1 - \mu, \varphi^*(t)\}}{1 - \mu}$$

avem $\varphi_0^* \in \overline{\mathscr{C}}, 0 \leqslant \varphi_0^*(t) \leqslant 1$, $\varphi_0^*(t) = 1$, dacă $t \in W(t_1)$ și $\varphi_0^*(t) = 0$ dacă $t \in B$.

Mulțimea A fiind compactă, există punctele $t_1^1, t_1^2, \ldots, t_1^m$ în A și vecinătățile $W(t_1^1), W(t_1^2), \ldots, W(t_1^m)$ care acoperă A precum și funcțiile $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_n^*$ din $\overline{\mathscr{C}}$ așa ca $0 \leqslant \varphi_j^*(t) \leqslant 1, \varphi_j^*(t) = 1$ dacă $t \in W(t_1^j)$ și $\varphi_j^*(t) = 0$ dacă $t \in B$.

Punînd în sfîrșit

$$\psi(t) = \max_{j=1}^{m} \varphi_j^*(t)$$

funcția ψ are proprietățile din enunțul lemei.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema[1] 3.4.1. (*Stone-Weierstrass*). *Dacă* $\mathscr{C}$ *este o subalgebră a algebrei* $C_{\mathbb{R}}(T)$ *așa ca* $1 \in \mathscr{C}$ *și care separă punctele lui* T, *atunci* $\overline{\mathscr{C}} = C_{\mathbb{R}}(T)$.

Demonstrație. Fie $\varphi \in C_{\mathbb{R}}(T)$. Fără restrîngerea generalității putem presupune că $\min_{t \in T} \varphi(t) = 0$ și $\max_{t \in T} \varphi(t) = 1$. Fie $n \in \mathbf{N}$ și pentru orice $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ să punem

$$A_j = \left\{ t \mid \varphi(t) \geqslant \frac{j+1}{n} \right\}$$

$$B_j = \left\{ t \mid \varphi(t) \leqslant \frac{j}{n} \right\}$$

Deoarece φ este continuă, mulțimile A_j, B_j sînt închise și avem evident

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{n-1}$$

$$B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_{n-1}$$

Este de asemenea evident că $A_j \cap B_j = \varnothing$, $(j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Pentru fiecare j, să considerăm o funcție $\psi_j \in \mathscr{C}$ asociată perechii A_j, B_j ca în enunțul lemei precedente. Să punem

$$\psi(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(t)$$

Fie acum $t \in T$. Există atunci $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ astfel încît

$$\frac{k}{n} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{k+1}{n} \tag{3.6}$$

Rezultă $t \in A_{k-1} \cap B_{k+1}$ și deci

$$\psi_j(t) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = 0, 1, \ldots, k-1 \\ 0 \text{ pentru } j = k+1, k+2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Cum $0 \leqslant \psi_k(t) \leqslant 1$ rezultă

$$\frac{k}{n} \leqslant \psi(t) \leqslant \frac{k+1}{n}$$

Ținînd seama de (3.6) deducem

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \frac{1}{n}$$

Deoarece t a fost oarecare în T, avem

$$\|\varphi - \psi\| \leqslant \frac{1}{n}$$

Cu aceasta, am arătat că $\varphi \in \overline{\mathscr{C}}$ și teorema este demonstrată.

---

[1] Această teoremă generalizează cunoscuta teoremă a lui Weierstrass privind aproximarea funcțiilor reale continue prin polinoame.

Scanned with OKEN Scanner

Corolar 3.4.1. *Dacă $\mathscr{C}$ este o subalgebră a algebrei $C_K(T)$ așa ca $1 \in \mathscr{C}$, astfel ca din $\varphi \in \mathscr{C}$ să rezulte*[1] $\overline{\varphi} \in \mathscr{C}$ *iar $\mathscr{C}$ separă punctele lui T atunci, $\overline{\mathscr{C}} = C_K(T)$.*

Demonstrație. Dacă $\varphi \in \mathscr{C}$ atunci $\operatorname{re} \varphi \in \mathscr{C}$ și $\operatorname{im} \varphi \in \mathscr{C}$. Dacă $t_1 \neq t_2$ atunci există $\varphi \in \mathscr{C}$ așa ca $\varphi(t) \neq \varphi(t_2)$ și deci cel puțin unul din cazurile următoare are loc: $\operatorname{re} \varphi(t_1) \neq \operatorname{re} \varphi(t_2)$, $\operatorname{im} \varphi(t_1) \neq \operatorname{im} \varphi(t_2)$. Corolarul se deduce acum cu ușurință.

3.5. REPREZENTAREA UNOR ALGEBRE BANACH

Fie $\mathfrak{X}$ o algebră Banach complexă comutativă unitară.

Să considerăm spațiul compact $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathfrak{X})$ al caracterelor lui $\mathfrak{X}$ și algebra $\Phi(\mathfrak{X})$ de funcții continue pe $\mathscr{F}$, definită în secțiunea 3.3.

Dacă punem $h(x) = \varphi_x$ obținem o aplicație omomorfă a lui $\mathfrak{X}$ pe $\Phi(\mathfrak{X})$. Are deci loc

Teorema 3.5.1. *Orice algebră Banach complexă comutativă unitară se aplică omomorf pe o algebră de funcții complexe continue, definite pe un spațiu compact.*

Definiția 3.5.1. *Se numește radicalul algebrei $\mathfrak{X}$, intersecția tuturor idealelor maximale ale lui $\mathfrak{X}$. Dacă radicalul lui $\mathfrak{X}$ se reduce la elementul nul, atunci $\mathfrak{X}$ se numește algebră semisimplă.*

Observație. Radicalul algebrei $\mathfrak{X}$ coincide cu mulțimea tuturor elementelor $x \in \mathfrak{X}$ pentru care $\lim\limits_n \sqrt[n]{||x^n||} = 0$.

Într-adevăr, în baza teoremei 3.3.1 condiția $\lim\limits_n \sqrt[n]{||x^n||} = 0$ este echivalentă cu condiția $\varphi_x(f) = 0$, $\forall f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$ deci cu condiția $x \in E$, $\forall E \in \mathscr{E}(\mathfrak{X})$ (a se vedea și propoziția 3.2.1).

Teorema 3.5.2. *Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră semisimplă, atunci $\mathfrak{X}$ și $\Phi(\mathfrak{X})$ sînt algebre izomorfe.*

Demonstrație. După cum am văzut mai înainte, formula $h(x) = \varphi_x$ definește o aplicație omomorfă a lui $\mathfrak{X}$ pe $\Phi(\mathfrak{X})$. Egalitatea $h(x) = 0$ este echivalentă cu condiția $f(x) = 0$, $\forall f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$ deci cu condiția $x \in E$, $\forall E \in \mathscr{E}(\mathfrak{X})$. Cu alte cuvinte dacă $h(x) = 0$ atunci x aparține radicalului algebrei $\mathfrak{X}$ și cum $\mathfrak{X}$ este semisimplă, $x = 0$. Deci aplicația h este biunivocă.

Teorema 3.5.3. *Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră Banach complexă comutativă unitară, care satisface condițiile*

(i) $||x^2|| = ||x||^2$, $\forall x \in \mathfrak{X}$,

(ii) $\overline{\varphi}_x \in \Phi(\mathfrak{X})$, $\forall x \in \mathfrak{X}$,

atunci $\mathfrak{X}$ este izomorfă (ca algebră normată) cu algebra Banach $C_K(\mathscr{F})$ a tuturor funcțiilor complexe continue definite pe spațiul $\mathscr{F}$ al caracterelor lui $\mathfrak{X}$.

Demonstrație. În baza teoremei 3.3.1

$$\max_{f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})} |\varphi_x(f)| = \lim_n \sqrt[n]{||x^n||} \tag{3.7}$$

[1] Notăm $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi(t)}$ (conjugatul lui $\varphi(t)$). Dacă $\lambda \in K$ și anume $\lambda = \alpha + \beta i$, $(\alpha, \beta \in R)$, notăm $\operatorname{re} \lambda = \alpha$, $\operatorname{im} \lambda = \beta$.

Scanned with OKEN Scanner

Din condiția (i) rezultă

$$\lim_n \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_n \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \|x\|$$

și cu (3.7) obținem

$$\max_{f\in\mathscr{F}(\mathfrak{X})} |\varphi_x(f)| = \|x\| \tag{3.8}$$

Să considerăm acum algebra Banach $\mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathscr{F})$ cu norma obișnuită

$$\|\varphi\| = \max_{f\in\mathscr{F}} |\varphi(f)| \quad (\varphi \in \mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathscr{F}))$$

precum și subalgebra $\Phi(\mathfrak{X})$ a lui $\mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathscr{F})$. Egalitatea (3.8) se poate scrie $\|\varphi_x\| = \|x\|$ deci aplicația $h\colon \mathfrak{X} \to \Phi(\mathfrak{X})$ dată de formula $h(x) = \varphi_x$ păstrează norma. În particular, dacă un șir $\{\varphi_{x_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniform către o funcție ψ, atunci șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge în normă către un element $x \in \mathfrak{X}$. Dacă $\varphi \in \mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathscr{F})$ atunci cu corolarul 3.4.1 al teoremei Stone-Weierstrass, există un șir $\{\varphi_{x_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente din $\Phi(\mathfrak{X})$ care converge uniform către φ. Rezultă că există $x \in \mathfrak{X}$ așa ca $x = \lim_n x_n$. Cum

$$\|\varphi_{x_n} - \varphi_x\| = \|x_n - x\|$$

rezultă $\varphi = \varphi_x$. Deci $\Phi(\mathfrak{X}) = \mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathscr{F})$. Omomorfismul h este deci un izomorfism între algebrele normate $\mathfrak{X}$ și $\mathbf{C}_\mathbf{K}(\mathscr{F})$.

Teorema este demonstrată.

Definiția 3.5.2. *Se numește algebră Banach involutivă, orice algebră Banach complexă $\mathfrak{X}$ în care este dată o aplicație $x \to x^*$ a lui $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$ (numită involuție) cu următoarele proprietăți*: $(x+y)^* = x^* + y^*$; $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$; $(xy)^* = y^* x^*$; $(x^*)^* = x$; $\|xx^*\| = \|x\|\,\|x^*\|$.

Observație. Din proprietățile involuției rezultă că $(xx^*)^* = xx^*$ și $(x^2)^* = (x^*)^2$ oricare ar fi x. Dacă $\mathfrak{X}$ este o algebră Banach involutivă unitară, atunci $u^* = x$. Într-o astfel de algebră, dacă un element x este inversabil, la fel este și x^* căci din $xx^{-1} = x^{-1}x = u$ rezultă $(x^{-1})^* x^* = (xx^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = x^*(x^{-1})^* = u$ deci $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$.

Teorema 3.5.4. *(I. M. Ghelfand-M. A. Naimark). Pentru orice algebră Banach involutivă comutativă unitară $\mathfrak{X}$, există un spațiu topologic compact T astfel ca $\mathfrak{X}$ să fie izomorfă cu algebra Banach $\mathbf{C}_\mathbf{K}(T)$.*

Demonstrație. Vom arăta că putem lua $T = \mathscr{F}(\mathfrak{X})$. Pentru aceasta vom arăta că sînt satisfăcute condițiile (i) și (ii) din teorema 3.5.3. Să observăm întîi că pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ avem

$$\|(xx^*)^2\| = \|(xx^*)(xx^*)^*\| = \|xx^*\|\,\|(xx^*)^*\| = \|xx^*\|^2 = \|x\|^2\|x^*\|^2$$

$$\|(xx^*)^2\| = \|x^2(x^*)^2\| = \|x^2(x^2)^*\| = \|x^2\|\,\|(x^2)^*\| = \|x^2\|\,\|(x^*)^2\|$$

de unde

$$\|x\|^2\|x^*\|^2 = \|x^2\|\,\|(x^*)^2\| \tag{3.9}$$

Din $\|(x^*)^2\| \leqslant \|x^*\|^2$ și din (3.9) rezultă

$$\|x\|^2\|x^*\|^2 \leqslant \|x^2\|\,\|x^*\|^2$$

Scanned with OKEN Scanner

și prin urmare $||x||^2 \leqslant ||x^2||$. Inegalitatea contrară fiind îndeplinită în orice algebră normată, are loc egalitatea

$$||x^2|| = ||x||^2, \quad (\forall x \in \mathfrak{X})$$

Să arătăm acum că pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ avem

$$\varphi_{x^*}(f) = \overline{\varphi_x(f)}, \quad (\forall f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})) \tag{3.10}$$

Să presupunem că ar exista un element $a \in \mathfrak{X}$ și un element $f_0 \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$ așa ca $\operatorname{im} \varphi_{a^*}(f_0) \neq \operatorname{im} \overline{\varphi_a(f_0)}$. Notînd

$$\alpha = \operatorname{re} \varphi_{a+a^*}(f_0), \quad \beta = \operatorname{im} \varphi_{a+a^*}(f_0)$$

avem deci $\beta \neq 0$ și punînd

$$b = \frac{1}{\beta}(a + a^* - \alpha u)$$

avem evident $b = b^*$. Din $\varphi_b(f_0) = i$ deci din $\varphi_{b-iu}(f_0) = 0$ rezultă că elementul $b - iu$ nu este inversabil. Deoarece $b + iu = (b - iu)^*$ rezultă că nici $b + iu$ nu este inversabil deci există $f_1 \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$ așa ca $\varphi_b(f_1) = -i$. Fie acum $0 < \lambda \in \mathbf{R}$. Deoarece

$$\varphi_{b+\lambda iu}(f_0) = (1+\lambda)i, \quad \varphi_{b-\lambda iu}(f_1) = -(1+\lambda)i$$

avem

$$1 + \lambda \leqslant \min \{||b + \lambda iu||, \ ||b - \lambda iu||\}. \tag{3.11}$$

Pe de altă parte

$$(b + \lambda iu)(b + \lambda iu)^* = (b + \lambda iu)(b - \lambda iu) = b^2 + \lambda^2 u$$

deci cu (3.11)

$$(1+\lambda)^2 \leqslant ||b + \lambda iu||\ ||b - \lambda iu|| = ||b^2 + \lambda^2 u|| \tag{3.12}$$

Cum însă $||b^2 + \lambda^2 u|| \leqslant ||b^2|| + \lambda^2$, din (3.12) obținem $1 + 2\lambda \leqslant ||b^2||$, $\forall \lambda > 0$ ceea ce este absurd. Deci $\operatorname{im} \varphi_{x^*}(f) = \operatorname{im} \overline{\varphi_x(f)}$, $\forall x \in \mathfrak{X}$, $\forall f \in \mathscr{F}(\mathfrak{X})$. Cu $\operatorname{re} \varphi_{x^*}(f) = \operatorname{im} \varphi_{ix^*}(f)$ și $(-ix)^* = ix^*$ se deduce $\operatorname{re} \varphi_{x^*}(f) = \operatorname{re} \overline{\varphi_x(f)}$ și deci are loc (3.10), $\forall x \in \mathfrak{X}$. De aici rezultă $\overline{\varphi_x} \in \Phi(\mathfrak{X})$, $\forall x \in \mathfrak{X}$.

În concluzie, $\mathfrak{X}$ satisface condițiile (i) și (ii) din teorema 3.5.3 și deci se poate lua $T = \mathscr{F}(\mathfrak{X})$.

Exemple. (1) Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu Hilbert complex, atunci $\mathscr{L}(\mathfrak{X})$ este o algebră Banach involutivă unitară, dacă se ia ca involuție aplicația $U \to U^*$. Această algebră nu este însă comutativă.

(2) Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert complex și $\mathscr{G}$ o mulțime de operatori normali (care aplică $\mathfrak{X}$ în $\mathfrak{X}$) cu proprietățile: (i) $UV = VU$, $\forall U, V \in \mathscr{G}$; (ii) $U^* \in \mathscr{G}$, $\forall U \in \mathscr{G}$. Să punem

$$\mathscr{G}' = \{V \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}) \mid VU = UV, \ \forall U \in \mathscr{G}\}$$

și fie

$$\mathscr{H} = \{U \in \mathscr{L}(\mathfrak{X}) \mid UV = VU, \ \forall V \in \mathscr{G}'\}$$

Atunci elementele lui $\mathscr{H}$ sînt operatori normali, iar $\mathscr{H}$ este o algebră Banach involutivă unitară și comutativă. Există deci un spațiu topologic compact T, astfel ca algebra Banach $\mathscr{H}$ să fie izomorfă cu algebra Banach $\mathbf{C}_{\mathbf{K}}(T)$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

DISTRIBUȚII

Teoria distribuțiilor, ale cărei baze au fost puse de matematicianul L. Schwartz[1], a apărut ca urmare a unor probleme ridicate atît de matematică cît și de fizica modernă. Menționăm, ca exemplu, necesitatea de a lucra cu soluții generalizate în teoria ecuațiilor diferențiale sau problemele puse de mecanica cuantică. Actualmente, teoria distribuțiilor reprezintă un capitol al analizei funcționale care are numeroase aplicații.

§ 1. GENERALITĂȚI ASUPRA DISTRIBUȚIILOR

În tot acest paragraf vom introduce noțiunea de distribuție, precum și noțiunile de distribuție cu suport compact și de distribuție temperată.

Vom considera spațiul $\mathbf{R}^m$ cu norma obișnuită.

În acest paragraf, ca și în paragrafele următoare vom nota cu T o submulțime deschisă oarecare (nevidă) a spațiului $\mathbf{R}^m$.

1.1. SPAȚIUL LUI SCHWARTZ

Vom nota $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$, iar pentru orice $k=(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m)\in\mathbf{N}_0^m$ vom pune $\nu(k)=\sum_{j=1}^{m}\varkappa_j$. Vom nota cu D^k operația de derivare

$$D^k x(t)=\frac{\partial^{\nu(k)}}{\partial\tau_1^{\varkappa_1}\ldots\partial\tau_m^{\varkappa_m}}x(\tau_1, \ldots, \tau_m)$$

unde $t=(\tau_1, \ldots, \tau_m)$.

Se numește *suportul* unei funcții x: $T\to\Gamma$ închiderea în T a mulțimii $\{t|x(t)\neq 0\}$. Suportul funcției x va fi notat $\operatorname{spt} x$.

Vom nota prin $\mathbf{C}_\Gamma^\infty(T)$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe T, cu valori în Γ, care admit derivate parțiale continue de orice ordin. Această mulțime este un spațiu liniar în raport cu operațiile obișnuite cu funcțiile.

[1] A se vedea lucrarea [29] de la „Bibliografie".

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice parte compactă Q a lui T și pentru orice $j \in \mathbf{N}_0$, formula

$$p_{Qj}(x) = \sup \{|D^k x(t)| \mid \nu(k) \leqslant j;\ t \in Q\}$$

definește o seminormă pe spațiul liniar $\mathbf{C}_\Gamma^\infty(T)$. Cu topologia definită de familia tuturor acestor seminorme, $\mathbf{C}_\Gamma^\infty(T)$ este un spațiu bornologic separat[1].

Pentru orice parte compactă Q a lui T vom pune

$$\mathscr{D}_\Gamma(T; Q) = \{x \in \mathbf{C}_\Gamma^\infty(T) \mid \mathbf{spt}\ x \subset Q\}.$$

Mulțimea $\mathscr{D}_\Gamma(T; Q)$ este un spațiu bornologic separat cu topologia definită de familia de seminorme $\{p_{Qj}\}_{j \in \mathbf{N}_0}$.

Vom nota cu $\mathbf{Q}$ mulțimea tuturor părților compacte ale lui T și vom pune

$$\mathscr{D}_\Gamma(T) = \bigcup_{Q \in \mathbf{Q}} \mathscr{D}_\Gamma(T; Q)$$

Este evident că dacă $Q_1 \subset Q_2$, atunci topologia indusă pe $\mathscr{D}_\Gamma(T; Q_1)$ de cea din $\mathscr{D}_\Gamma(T; Q_2)$ coincide cu topologia inițială a lui $\mathscr{D}_\Gamma(T; Q_1)$. Vom considera pe $\mathscr{D}_\Gamma(T)$ topologia limită inductivă (strictă) a topologiilor spațiilor $\mathscr{D}_\Gamma(T; Q)$ deci

$$\mathscr{D}_\Gamma(T) = \varinjlim_{Q \in \mathbf{Q}} \mathscr{D}_\Gamma(T,\ Q).$$

Acest spațiu este bornologic (a se vedea Capitolul II, teorema 2.8.2).

Pentru orice șir $\{Q_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de părți compacte ale lui T cu proprietățile: $Q_n \subset \mathbf{int}\ Q_{n+1}$, $(\forall n \in \mathbf{N})$, $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} Q_n = T$, avem

$$\mathscr{D}_\Gamma(T) = \varinjlim_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{D}_\Gamma(T; Q_n)$$

limita fiind strictă.

Spațiul $\mathscr{D}_\Gamma(T)$ se numește *spațiul lui Schiwartz*.

În cele ce urmează, vom omite indicele Γ.

Propoziția 1.1.1. *În spațiul $\mathscr{D}(T)$, o mulțime A este mărginită, dacă și numai dacă există o parte compactă Q a lui T astfel încît:*

(1) $\mathbf{spt}\ x \subset Q$, $\forall x \in A$;

(2) *pentru fiecare $k \in \mathbf{N}_0^m$ mulțimea $\{D^k x(t) \mid x \in A;\ t \in Q\}$ este mărginită.*

Demonstrație. Fie A mărginită. Să presupunem însă că condiția (1) nu este îndeplinită. Există atunci un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de elemente din A și un șir $\{t_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de puncte din T, fără puncte de acumulare în T, astfel ca $x_n(t_n) \neq 0$. Formula

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n(t_n)|^{-1} |x(t_n)|, \quad (x \in \mathscr{D}(T))$$

definește o seminormă pe spațiul $\mathscr{D}(T)$. Pe de altă parte, restricția lui p la fiecare subspațiu $\mathscr{D}(T; Q)$ este o seminormă continuă, după cum se verifică cu ușurință. Deci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, mulțimea

$$E(Q; p; \varepsilon) = \{x \in \mathscr{D}(T; Q) \mid p(x) < \varepsilon\}$$

[1] Lăsăm afirmația ca exercițiu.

Scanned with OKEN Scanner

este o vecinătate a originii în spațiul $\mathscr{D}(T; Q)$. Punînd

$$W(p; \varepsilon) = \{x \in \mathscr{D}(T) | p(x) < \varepsilon\}$$

obținem o mulțime echilibrată și convexă în $\mathscr{D}(T)$ iar

$$W(p; \varepsilon) \cap \mathscr{D}(T; Q) = E(Q; p; \varepsilon).$$

Deci $W(p; \varepsilon)$ este o vecinătate a originii în spațiul $\mathscr{D}(T)$. Rezultă că seminorma p este continuă pe spațiul $\mathscr{D}(T)$, deci $p(A)$ este mărginită. Dar $p(x_n) \geqslant n$, $(\forall n \in \mathbf{N})$, ceea ce este contradictoriu.

Am stabilit astfel condiția (1).

Să presupunem acum că (2) nu este îndeplinită. Există atunci $k_0 \in \mathbf{N}_0^m$ și un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de elemente din A așa ca

$$\sup_{t \in Q} |D^{k_0} x_n(t)| > n, \quad (n \in \mathbf{N})$$

(unde Q este o parte compactă a lui T pentru care (1) are loc).

Punînd

$$q(x) = \sup_{t \in Q} |D^{k_0} x(t)|, \quad (x \in \mathscr{D}(T; Q))$$

obținem o seminormă continuă pe spațiul $\mathscr{D}(T; Q)$.
Deoarece $q(x_n) > n$, mulțimea A nu este mărginită în spațiul $\mathscr{D}(T; Q)$ și deci nici în spațiul $\mathscr{D}(T)$, contrar ipotezei.

Am arătat deci că dacă A este mărginită atunci (1) și (2) sînt îndeplinite.

Reciproc, dacă sînt îndeplinite condițiile (1) și (2), atunci A este conținută și mărginită în $\mathscr{D}(T; Q)$ (ținînd seama de definiția topologiei în $\mathscr{D}(T; Q)$. și deci și în $\mathscr{D}(T)$ (în baza teoremei 2.8.1 cap. II).

Propoziția 1.1.2. *În spațiul $\mathscr{D}(T)$, un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge către* $\mathbf{0}$ *dacă și numai dacă sînt îndeplinite următoarele două condiții:*

(1) *există o parte compactă Q a lui T așa că* spt $x_n(t) \subset Q$ *oricare ar fi* $n \in \mathbf{N}$;

(2) *pentru fiecare D^k, șirul $\{D^k x_n(t)\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniform către zero.*

Demonstrație. Dacă $\lim_n x_n = \mathbf{0}$, atunci șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este mărginit în $\mathscr{D}(T)$ deci condiția (1) este îndeplinită în baza propoziției 1.1.1. Condiția (2) este evident verificată ținînd seama de definiția topologiei în $\mathscr{D}(T; Q)$ și de teorema 2.8.1. cap. II.

Suficiența condițiilor este de asemenea imediată.

1.2. NOȚIUNEA DE DISTRIBUȚIE

Fie T o parte deschisă a lui $\mathbf{R}^m$.

Definiția 1.2.1. *Se numește distribuție, pe T, orice funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathscr{D}_\Gamma(T)$.*

Dacă $\Gamma = \mathbf{R}$, distribuția se zice *reală*, iar dacă $\Gamma = \mathbf{K}$ distribuția se zice *complexă*.

Se obișnuiește a se vorbi de distribuție de m variabile, deși distribuția este o funcțională pe $\mathscr{D}_\Gamma(T)$ și nu o funcție pe T.

Dacă f este o distribuție, se notează adesea (f, x) în loc de $f(x)$, $(x \in \mathscr{D}_\Gamma(T))$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Deoarece $\mathscr{D}(T)$ este un spațiu bornologic, cu corolarul 2.7.1 din Cap. II și cu propoziția 1.1.1 din secțiunea precedentă, rezultă:

o funcțională liniară pe $\mathscr{D}(T)$ este o distribuție, dacă și numai dacă pentru orice parte compactă Q a lui T există $j \in \mathbf{N}_0$ și un număr real $\mu > 0$ astfel ca

$$|f(x)| \leqslant \mu p_{Qj}(x), \quad (x \in \mathscr{D}(T; Q))$$

Definiția 1.2.2. *Dacă f este o distribuție pe T, iar $\psi \in \mathbf{C}_\Gamma^\infty(T)$, atunci produsul ψf este dat de formula*

$$(\psi f, x) = (f, \psi x), \quad (x \in \mathscr{D}_\Gamma(T))$$

Se verifică ușor că această formulă definește o funcțională liniară și continuă pe spațiul $\mathscr{D}_\Gamma(T)$.

Pentru orice funcție φ: $\mathbf{R}^m \to \Gamma$ și orice $a \in \mathbf{R}^m$ vom defini funcția $\theta_a \varphi$ prin formula

$$(\theta_a \varphi)(t) = \varphi(t - a), \quad (t \in \mathbf{R}^m).$$

Definiția 1.2.3. *Dacă f este o distribuție pe $\mathbf{R}^m$, iar $a \in \mathbf{R}^m$, se numește translația lui f cu a, distribuția $\theta_a f$ dată de formula*

$$(\theta_a f, x) = (f, \theta_a x), \quad (x \in \mathscr{D}_\Gamma(\mathbf{R}^m)).$$

Faptul că această formulă definește o distribuție se verifică imediat.

Exemple. (1) Să considerăm o funcție φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ local integrabilă Lebesgue. Formula

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) x(t) \mathrm{d}t, \quad (x \in \mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}))$$

definește o distribuție pe $\mathbf{R}$ după cum se verifică ușor.

Această distribuție se numește *distribuție de tip funcție*. Se mai spune că f este distribuția definită de funcția φ.

Se poate demonstra că dacă f_1 și f_2 sînt distribuții definite respectiv de funcțiile local integrabile φ_1 și φ_2 atunci $f_1 = f_2$ dacă și numai dacă $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ a.p.t.[1].

Să observăm că dacă f este distribuția definită de funcția φ și dacă $\psi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$, atunci distribuția ψf este definită de funcția $\psi \varphi$.

Verificarea este imediată.

Dacă f este o distribuție pe $\mathbf{R}$, definită de funcția φ atunci distribuția $\theta_a f$ este definită de funcția $\theta_a \varphi$.

Verificarea este imediată.

Distribuția f definită de o constantă μ este dată de formula

$$(f, x) = \mu \int_{\mathbf{R}} x(t) \mathrm{d}t, \quad (x \in \mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}))$$

În cazul cînd $\mu = 1$, distribuția corespunzătoare se va nota prin $\mathbf{1}$.

Funcția lui Heaviside, adică funcția

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t \in (-\infty, 0) \\ 1 \text{ dacă } t \in (0, +\infty) \end{cases}$$

[1] Lăsăm afirmația ca exercițiu.

definește o distribuție h care se numește *distribuția lui Heaviside*. Avem

$$(h,\ x)=\int_0^\infty x(t)\mathrm{d}t,\ (x\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})).$$

(2) Dacă T este o parte deschisă a lui $\mathbf{R}^m$ iar $\varphi : T\to\Gamma$ este o funcție local integrabilă Lebesgue, atunci distribuția definită de φ se introduce prin formula

$$f(x)=\int_T \varphi(t)x(t)\mathrm{d}t,\ (x\in\mathscr{D}_\Gamma(T))$$

(3) Se numește *distribuția lui Dirac* concentrată într-un punct $a\in T$, distribuția δ_a dată de formula

$$(\delta_a,\ x)=x(a),\ (x\in\mathscr{D}(T))$$

Dacă $a=0$ se notează δ în loc de δ_0.

Faptul că formula precedentă definește o distribuție se verifică imediat. Se verifică de asemenea imediat că $\theta_a\delta_b=\delta_{a+b}$. În particular $\delta_a=0_a\delta$.

Distribuția lui Dirac nu este de tip funcție.

Într-adevăr, dacă, de exemplu, distribuția reală de variabilă reală δ ar fi de tip funcție, atunci ar exista o funcție local integrabilă $\varphi : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel ca

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)x(t)\mathrm{d}t=x(0)$$

oricare ar fi $x\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$. Luînd în particular funcția[1]

$$x_n(t)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{\frac{1}{n^2}}{t^2-\frac{1}{n^2}}\right) & \text{dacă } |t|<\dfrac{1}{n}\\ 0 & \text{dacă } |t|\geqslant\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

obținem[2]

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(t)x_n(t)\mathrm{d}t=e^{-1}$$

Dar

$$\lim_n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(t)x_n(t)\mathrm{d}t=0$$

ceea ce este contradictoriu.

---

[1] Notăm: $\exp(\lambda)=e^\lambda$.

[2] Se verifică ușor că $x_n\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$.

Scanned with OKEN Scanner

Exercițiu. Să se arate că formula

$$f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|\geq\varepsilon}\frac{x(t)}{t}\,dt,\quad (x\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})) \tag{1.1}$$

definește o distribuție.

1.3. DISTRIBUȚII CARE SE ANULEAZĂ PE O MULȚIME DESCHISĂ

Definiția 1.3.1. *O distribuție f pe T se anulează pe o parte deschisă A a lui T, dacă din $x\in\mathscr{D}(T)$ și* **spt** $x(t)\subset A$ *rezultă* $(f, x)=0$. *Vom spune că distribuțiile f_1 și f_2 sînt egale pe A dacă f_1-f_2 se anulează pe A.*

Teorema 1.3.1. *Dacă $\{T_h\}_{h\in H}$ este o familie de submulțimi deschise ale lui T care acoperă T, atunci există o familie $\{u_j\}_{j\in J}$ de funcții din $\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^m)$ cu următoarele proprietăți:*

(1) *pentru orice $j\in J$ există $h\in H$ așa ca* **spt** $u_j(t)\subset T_h$;

(2) $0\leqslant u_j(t)\leqslant 1$ *oricare ar fi $j\in J$ și $t\in T$;*

(3) $\sum_{j\in J}u_j(t)=1$ *oricare ar fi $t\in T$.*

Demonstrație. Fie t_0 un punct oarecare al lui T. Există atunci $h\in H$ așa ca $t_0\in T_h$. Fie $\rho>0$ așa ca sfera deschisă $S(t_0;\rho)$ să fie strict inclusă în T_h. Dacă punem

$$\varphi_{t_0\rho}(t)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{\rho^2}{\|t-t_0\|^2-\rho^2}\right) & \text{dacă } \|t-t_0\|<\rho\\ 0 & \text{dacă } \|t-t_0\|\geqslant\rho\end{cases}$$

atunci $\varphi_{t_0\rho}\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^m)$ și $\varphi_{t_0\rho}$ se anulează în afara lui $S(t_0;\rho)$.

Există o familie $\{S_j\}_{j\in J}$ de sfere care acoperă T (fiecare fiind strict conținută într-una din mulțimile T_h) cu următoarea proprietate[1] : pentru orice parte compactă Q a lui T, avem $Q\cap S_j\neq\varnothing$ numai pentru o mulțime finită de indici. Fiecărei sfere S_j îi asociem o funcție $\psi_j\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^m)$ cu $\psi_j(t)\geqslant 0$ și care se anulează în afara lui S_j. Funcția ψ_j se poate construi ca funcția $\varphi_{t_0\rho}$ de mai înainte. Pentru un punct oarecare $t_0\in T$ există numai un număr finit de funcții ψ_j așa ca $\psi_j(t_0)\neq 0$ și există cel puțin o funcție ψ_j cu această proprietate.

Deci punînd

$$u_j(t)=\frac{\psi_j(t)}{\sum_{i\in J}\psi_i(t)},\quad (j\in J)$$

familia de funcții $\{u_j\}_{j\in J}$ are proprietățile din enunțul teoremei.

Definiția 1.3.2. *O familie $\{u_j\}_{j\in J}$ de funcții din $\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^m)$ care are proprietățile* (1), (2), (3) *din teorema* 1.3.1. *se numește o descompunere a unității asociată familiei $\{T_h\}_{h\in H}$.*

[1] A se vedea capitolul introductiv, secțiunea 2.4.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.3.2. *Fie* $\{A_i\}_{i\in I}$ *o familie oarecare de mulțimi deschise din* T. *Dacă o distribuție* f *se anulează pe fiecare mulțime* A_i, *atunci* f *se anulează și pe* $\bigcup_{i\in I} A_i$.

Demonstrație. Să notăm

$$A=\bigcup_{i\in I} A_i$$

Fie $x\in\mathcal{D}(T)$ așa ca **spt** $x(t)\subset A$. Să notăm cu H mulțimea de indici obținută din I prin adăugarea unui nou element și să punem

$$T_h=\begin{cases} A_h & \text{dacă } h\in I \\ \complement(\textbf{spt}\ x(t)) & \text{dacă } h\notin I \end{cases}$$

Fie $\{u_j\}_{j\in J}$ o descompunere a unității asociată familiei de mulțimi $\{T_h\}_{h\in H}$ construită ca în teorema 1.3.1.

Să observăm că dacă **spt** $u_j(t)\subset\complement(\textbf{spt}\ x(t))$, atunci $u_jx=\mathbf{0}$ deci $(f, u_jx)=0$. Dacă **spt** $u_j(t)\not\subset\complement(\textbf{spt}\ x(t))$, atunci există $i\in I$ așa ca **spt** $u_j(t)\subset A_i$ și deci $(f, u_jx)=0$ și în acest caz. Deci

$$(f,\ x)=\sum_{j\in J}(f,\ u_jx)=0$$

adică f se anulează pe mulțimea A.

1.4. DISTRIBUȚII CU SUPORT COMPACT

Avînd în vedere teorema 1.3.2, putem introduce noțiunea de suport al unei distribuții.

Definiția 1.4.1. *Dacă* f *este o distribuție pe* T, *se numește suportul lui* f *și se notează cu* **spt** f, *cea mai mică mulțime închisă* $E\subset T$ *astfel ca* f *să se anuleze pe* $\complement E$.

Distribuțiile cu suport compact prezintă o importanță specială.

Teorema 1.4.1. *Fie* f *o distribuție pe* T, *cu suport compact. Există o funcțională liniară și continuă* g *pe spațiul* $\mathbf{C}^\infty(T)$ *și numai una, cu următoarele proprietăți:*

(1) $g(x)=f(x)$ *dacă* $x\in\mathcal{D}(T)$;

(2) *dacă* E *este o parte deschisă a lui* T, *așa ca* **spt** $f\subset E$, *dacă* $x\in\mathbf{C}^\infty(T)$ *și* $x(t)=0$, $\forall t\in E$, *atunci* $g(x)=0$.

Demonstrație. Deoarece **spt** f este o mulțime compactă, există un sistem finit de sfere deschise $S_1, S_2, \ldots, S_k$ care acoperă această mulțime. Fie $u_j\in\mathcal{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^m)$, $(j=1, 2, \ldots, n)$ o descompunere a unității asociată sistemului de mulțimi deschise $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Dacă punem $A=\bigcup_{i=1}^{k} S_i$ și

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{n} u_j(t),$$

atunci $\varphi(t)=1$ dacă $t\in A$.

Există deci $\varphi\in\mathcal{D}(T)$ și $A\subset T$ deschisă așa ca **spt** $f\subset A$ și $\varphi(t)=1$, $\forall t\in A$. Considerînd o astfel de funcție φ, să punem

$$g(x)=f(\varphi x),\quad (x\in\mathbf{C}^\infty(T)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică ușor că funcționala g nu depinde de alegerea funcției φ (cu proprietățile menționate) și că g este liniară.

Fie acum B o mulțime mărginită în $\mathbf{C}^\infty(T)$. Punînd

$$B_0=\{\varphi x|x\in B\}$$

obținem o submulțime mărginită a lui $\mathscr{D}(T)$. Dar atunci $f(B_0)$ este mărginită și deci $g(B)$ este mărginită. Spațiul $\mathbf{C}^\infty(T)$ fiind bornologic rezultă că g este continuă.

Se verifică cu ușurință că funcționala g are proprietățile (1), (2), din enunțul teoremei.

Observație. Din teorema 1.4.1. rezultă că mulțimea distribuțiilor (pe T) cu suport compact, se poate identifica cu mulțimea funcționalelelor liniare și continue pe spațiul $\mathbf{C}^\infty(T)$.

1.5. DISTRIBUȚII TEMPERATE

Dacă $t=(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)\in\mathbf{R}^m$ și dacă $a=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in\mathbf{N}_0^m$ vom nota

$$t^a=\tau_1^{\alpha_1}\tau_2^{\alpha_2}\ldots\tau_m^{\alpha_m}$$

O funcție $x\in\mathbf{C}_\Gamma^\infty(\mathbf{R}_m)$ se zice că *descrește rapid* (la infinit), dacă pentru orice a, $k\in\mathbf{N}_0^n$, există $\lambda_{ak}\in\mathbf{R}$ astfel încît

$$|t^aD^kx(t)|\leqslant\lambda_{ak}$$

oricare ar fi $t\in\mathbf{R}^m$.

Dacă $x\in\mathscr{D}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$ atunci x este evident o funcție care descrește rapid, dar se pot da ușor exemple de funcții care descresc rapid, dar care nu au suport compact[1]. Vom nota cu $\mathscr{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe $\mathbf{R}^m$ (cu valori în Γ) care descresc rapid. Această mulțime este un spațiu liniar în raport cu operațiile obișnuite cu funcțiile. Vom organiza acest spațiu liniar ca spațiu local convex (separat), considerînd topologia definită de mulțimea tuturor seminormelor de forma

$$p_{\varphi k}(x)=\sup_{t\in\mathbf{R}^m}|\varphi(t)D^kx(t)|,\quad(x\in\mathscr{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m))$$

unde φ este un polinom oarecare.

Propoziția 1.5.1. *În spațiul* $\mathscr{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$, *submulțimea* $\mathscr{D}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$ *este densă.*

Demonstrație. Fie $x\in\mathscr{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$. Să considerăm $z\in\mathscr{D}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$ așa ca $z(t)=1$ pentru $\|t\|\leqslant1$. Pentru orice $\varepsilon>0$ să punem

$$y_\varepsilon(t)=z(\varepsilon t)x(t).$$

Din calculul derivatei produsului $(z(\varepsilon t)-1)x(t)$ se observă că expresia lui $D^k(y_\varepsilon(t)-x(t))$ este o combinație liniară de termeni de forma

$$D^{k'}x(t)\varepsilon^{\nu(k')}\{D^{k'}z(s)\}_{s=\varepsilon t}$$

[1] Un exemplu simplu este funcția $x(t)=\exp\left(-\sum_{j=1}^m\tau_j^2\right)$.

precum şi de termenul

$$D^k x(t)(z(\varepsilon t)-1)$$

unde k' şi k'' satisfac condiţia

$$\nu(k')+\nu(k'')=\nu(k)$$

iar $\nu(k'')>0$.

Din expresia obţinută pentru $D^k(y_\varepsilon(t)-x(t))$ se deduce uşor că $\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon = x$ în topologia spaţiului $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$.

Definiţia 1.5.1. *Se numeşte distribuţie temperată (pe* $\mathbf{R}^m$*), orice funcţională liniară şi continuă pe spaţiul* $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$.

Observaţii. (1) Deoarece topologia din spaţiul $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$ este mai fină decît topologia indusă de cea din $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$, rezultă că restricţia la spaţiul $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$ a unei distribuţii temperate este o distribuţie. Dacă g_1, g_2 sînt distribuţii temperate şi notăm respectiv prin f_1, f_2 restricţiile lor la $\mathcal{D}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$, atunci din $g_1\neq g_2$ rezultă $f_1\neq f_2$. Mulţimea distribuţiilor temperate (pe $\mathbf{R}^m$) poate fi deci identificată cu o parte a mulţimii tuturor distribuţiilor (pe $\mathbf{R}^m$). Aceasta justifică denumirea de distribuţie dată unei funcţionale liniare şi continue pe $\mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{R}^m)$.

(2) În baza celor arătate în secţiunea 1.4, orice distribuţie cu suport compact se prelungeşte în mod unic pînă la o distribuţie temperată. Deci mulţimea distribuţiilor cu suport compact poate fi identificată cu o parte a mulţimii distribuţiilor temperate.

Exemplu. Dacă φ este o funcţie p-integrabilă ($p\geqslant 1$) pe dreapta reală, atunci funcţionala f dată de formula

$$f(x)=\int_{\mathbf{R}}\varphi(t)x(t)\mathrm{d}t,\ (x\in\mathcal{S}_\Gamma(\mathbf{R}))$$

defineşte o distribuţie temperată pe $\mathbf{R}$.

Lăsăm verificarea ca exerciţiu[1].

§ 2. OPERAŢII CU DISTRIBUŢIILE

În acest paragraf vom introduce derivata unei distribuţii, produsul direct şi convoluţia a două distribuţii, transformata Fourier a unei distribuţii temperate.

Pentru aplicaţiile teoriei distribuţiilor este important faptul că pentru o distribuţie oarecare are sens derivata de orice ordin. În ceea ce priveşte convoluţia şi transformarea Fourier ele sînt utile, în particular, în studiul ecuaţiilor diferenţiale.

[1] Se va aplica inegalitatea lui Hölder integralei funcţiei

$$y(t)=(1+|t|^2)^{-\alpha}|\varphi(t)|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie T o mulțime deschisă pe dreapta reală.

Definiția 2.1.1. *Dacă f este o distribuție pe T, se numește derivata lui f, distribuția f' dată de formula*

$$(f', x) = -(f, x'), \quad (x \in \mathscr{D}_\Gamma(T))$$

Se verifică cu ușurință că această formulă definește o distribuție pe T.

Observații. (1) Dacă f este o distribuție pe $\mathbf{R}$, definită de o funcție $\varphi \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R})$, atunci distribuția f' este definită de funcția φ'.

Lăsăm verificarea ca exercițiu.

(2) Fie f o distribuție definită de o funcție $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care derivata φ' există aproape peste tot și este local integrabilă. Atunci distribuția f' nu coincide, în general, cu distribuția definită de φ'.

De exemplu avem $h' = \delta$ (h fiind distribuția lui Heaviside), dar distribuția definită de χ' (χ fiind funcția lui Heaviside) este distribuția nulă.

(3) Din definiția 2.1.1 rezultă că derivata unei distribuții există totdeauna. Prin recurență obținem formula derivatei de ordinul n a unei distribuții f:

$$(f^{(n)}, x) = (-1)^n (f, x^{(n)}), \quad (x \in \mathscr{D}_\Gamma(T)).$$

Fie φ și ψ două funcții (reale sau complexe) definite pe T, local integrabile. Fie f și g distribuțiile definite respectiv de φ și ψ. Dacă $g = f'$ vom spune că ψ este *derivata generalizată* a lui φ. Cu alte cuvinte, ψ este derivata generalizată a lui φ, dacă

$$\int_T \psi(t) x(t) \mathrm{d}t = -\int_T \varphi(t) x'(t) \mathrm{d}t, \quad (x \in \mathscr{D}_\Gamma(\mathbf{R})).$$

În mod analog definim derivata generalizată de ordinul n.

Propoziția 2.1.1. *Derivata distribuțiilor are următoarele proprietăți:*

(1) $(\alpha f_1 + \beta f_2)' = \alpha f_1' + \beta f_2'$;

(2) *dacă* $\psi \in \mathbf{C}^\infty(T)$, *atunci* $(\psi f)' = \psi' f + \psi f'$

(3) *dacă* $f = (\sigma^*)\text{-}\lim_n f_n$, *atunci* $f' = (\sigma^*)\text{-}\lim_n f_n'$.

Verificarea se face cu ușurință;

Exerciții. (1) Să se arate că dacă f este o distribuție reală pe dreapta reală, atunci

$$f' = (\sigma^*)\text{-}\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} (\theta_{-s} f - f)$$

(2) Să se arate că distribuția f dată de formula (1.1) reprezintă derivata distribuției g dată de formula

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t| \geqslant \varepsilon} \ln|t| x(t) \mathrm{d}t, \quad (x \in \mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})).$$

(3) Fie $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție care admite derivată continuă, cu excepția unei mulțimi de puncte izolate t_j, în care funcția φ admite salturile λ_j. Să se arate

Scanned with OKEN Scanner

că dacă f este distribuția definită de φ iar g este distribuția definită de φ', atunci

$$f' = g + \sum_j \lambda_j \delta_{t_j}.$$

(4) Să se arate că dacă f_n este distribuția definită de funcția

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon_n}{t^2 + \varepsilon_n^2}$$

iar $0 < \varepsilon_n \to 0$, atunci $\delta = (\sigma^*)\text{-}\lim_n f_n$.

(5) Să se arate că dacă g_n este distribuția definită de funcția

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nt}{t}$$

atunci $\delta = (\sigma^*)\text{-}\lim_n g_n$

2.2. DERIVAREA DISTRIBUȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

Fie T o parte deschisă a lui $\mathbf{R}^m$ și f o distribuție pe T.

Definiția 2.2.1. *Derivata parțială a lui f în raport cu variabila τ_j este distribuția* $\frac{\partial f}{\partial \tau_j}$ dată de formula

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_j}, x\right) = -\left(f, \frac{\partial x}{\partial \tau_j}\right), \quad (x \in \mathscr{D}(T)).$$

Observații. (1) Dacă f este distribuția definită de o funcție local integrabilă $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ care admite derivată parțială continuă în raport cu τ_j, atunci $\frac{\partial f}{\partial \tau_j}$ este distribuția definită de funcția $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_j}$.

(2) Pentru orice $k \in \mathbf{N}_0^n$ putem considera derivata $D^k f$ a unei distribuții oarecare f. Ea este dată de formula.

$$(D^k f, x) = (-1)^{\nu(k)}(f, D^k x), \quad (x \in \mathscr{D}(T)).$$

Derivata $D^k f$ există oricare ar fi distribuția f.

(3) Pentru funcții local integrabile pe T, *derivata generalizată* $D^k \varphi$ se definește ca în cazul funcțiilor de o variabilă. Cu alte cuvinte dacă φ și ψ sînt funcții local integrabile pe T, atunci $\psi = D^k \varphi$ dacă

$$\int_T \psi(t) x(t) dt = (-1)^{\nu(k)} \int_T \varphi(t) D^k x(t), \quad (x \in \mathscr{D}(T))$$

Complemente și exerciții. (1) Fie A un domeniu din $\mathbf{R}^2$, mărginit de o curbă închisă parțial netedă C. Fie φ o funcție reală definită pe $\mathbf{R}^2$, nulă în afara lui A, care admite derivate parțiale de ordinul întîi continue în interiorul lui A. Presupunem că funcția φ admite salturi pe curba C. Se poate demonstra că dacă f este distribuția definită de funcția φ, atunci

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_1}, x\right) = -\int_C \varphi(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 + \iint_A \frac{\partial \varphi(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_2},\ x\right)=-\int_C \varphi(\tau_1,\ \tau_2)x(\tau_1,\ \tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1+\iint_A \frac{\partial\varphi(\tau_1,\ \tau_2)}{\partial\tau_2}x(\tau_1,\ \tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2$$

oricare ar fi $x\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^2)$.

(2) Fie T o parte deschisă a lui $\mathbf{R}^m$, fie n un număr natural sau nul și să considerăm un număr real $p\geqslant 1$.

Să notăm cu $\mathscr{F}$ mulțimea tuturor funcțiilor local integrabile $\varphi: T\to\mathbf{K}$ cu proprietatea: pentru orice $k\in\mathbf{N}_0^m$ cu $\nu(k)\leqslant n$ funcția φ admite ca derivată generalizată[1] $D^k\varphi$, o funcție p-integrabilă pe T. În mulțimea $\mathscr{F}$ considerăm relația de echivalență: $\varphi_1\sim\varphi_2$ dacă $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ a.p.t. Notăm prin $W^{n,\,p}(T)$, mulțimea claselor de echivalență. Organizăm această mulțime ca spațiu liniar normat, considerînd operațiile obișnuite cu clasele de echivalență precum și norma

$$\|\varphi\|=\left(\sum_{\nu(k)\leqslant n}\int_T |D^k\varphi(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

notînd tot cu φ clasa determinată de φ.

Se poate demonstra că $W^{n,\,p}(T)$ este un spațiu Banach. Spațiile $W^{n,\,p}(T)$ ($n\in\mathbf{N}$; $1\leqslant p\in\mathbf{R}$) se numesc *spațiile lui Sobolev*. Se notează $W^n(T)=W^{n,\,2}(T)$. Spațiul $W^n(T)$ este un spațiu Hilbert.

Spațiile lui Sobolev sînt utilizate în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale

2.3. PRODUSUL DIRECT A DOUĂ DISTRIBUȚII

Dacă f este o distribuție pe o mulțime T, se notează uneori $(f(t),\ x(t))$ în loc de $(f,\ x)$. Această notație este utilă în anumite cazuri, de exemplu prin $(f(t),\ x(t+s))$ se înțelege că f se aplică funcției $t\to x(t+s)$.

Propoziția 2.3.1. *Dacă f este o distribuție pe $\mathbf{R}^m$, iar g o distribuție pe $\mathbf{R}^n$, atunci pentru orice $z\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$, funcția y dată de formula*

$$y(s)=(f(t)),\ z(t,\ s),\ (s\in\mathbf{R}^n) \tag{2.1}$$

aparține lui $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, iar funcționala $f\times g$ definită pe $\mathscr{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$ prin formula

$$(f\times g,\ z)=(g(s),\ (f(t),\ z(t,\ s))) \tag{2.2}$$

este o distribuție pe $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$.

Demonstrație. Este evident că funcția y dată de formula (2.1) are suport compact. Existența derivatelor de orice ordin se stabilește cu ușurință. Avem, de exemplu (punînd $s=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n)$)

$$\frac{y(\sigma_1+\lambda,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n)-y(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n)}{\lambda}=$$

$$=\left(f(t),\ \frac{z(t,\ \sigma_1+\lambda,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_m)-z(t,\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_n)}{\lambda}\right).$$

[1] A se vedea 2.2, Observația (3).

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{z(t,\sigma_1+\lambda,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)-z(t,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}{\lambda}=\frac{\partial z(t,s)}{\partial\sigma_1}$$

în topologia din spațiul $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$, iar f este continuă, rezultă existența derivatei lui y în raport cu σ_1 și anume

$$\frac{\partial y(s)}{\partial\sigma_1}=\left(f(t),\ \frac{\partial z(t,s)}{\partial\sigma_1}\right).$$

Să considerăm acum funcționala $f\times g$ dată de formula (2.2). Ea este evident liniară. Pentru a arăta că este o distribuție, rămîne să verificăm că ea este mărginită pe orice parte mărginită a spațiului $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$. Fie deci E o parte mărginită a lui $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$. Există atunci mulțimile compacte $Q_1\subset\mathbf{R}^m$ și $Q_2\subset\mathbf{R}^n$ așa ca

$$\operatorname{spt} z(t,s)\subset Q_1\times Q_2$$

dacă $z\in E$. Dacă $s_0\notin Q_2$, atunci $z(t,s_0)=0$, de unde rezultă $y(s_0)=0$. Deci pentru orice $z\in E$ avem $\operatorname{spt} y\subset Q_2$. Pe de altă parte se poate arăta că pentru orice D^k, mulțimea

$$\{D^k y(s)\,|\,y(s)=(f(t),z(t,s));\ z\in E,\ s\in Q_2\}$$

este mărginită[1].

Mulțimea

$$\{y\,|\,y(s)=(f(t),z(t,s));\ z\in E\}$$

este deci mărginită în spațiul $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Funcționala g fiind mărginită pe orice mulțime mărginită din spațiul $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, rezultă că mulțimea

$$\{(g(s),(f(t),z(t,s)))\,|\,z\in E\}$$

este mărginită. Deci $f\times g$ este o distribuție.

Definiția 2.3.1. *Dacă f este o distribuție pe $\mathbf{R}^m$, iar g o distribuție pe $\mathbf{R}^n$, atunci distribuția $f\times g$ pe $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ definită prin formula* (2.2), *se numește produsul direct al distribuțiilor f și g.*

Observație: Dacă f și g sînt distribuții definite respectiv de funcțiile φ și ψ atunci $f\times g$ este definită de funcția ω dată de formula $\omega(t,s)=\varphi(t)\psi(s)$.

Să notăm acum cu $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)\otimes\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ submulțimea spațiului $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$ formată de toate funcțiile de forma

$$z(t,s)=\sum_{j=1}^{k}x_j(t)y_j(s)$$

cu $x_j\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ și $y_j\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

---

[1] Lăsăm verificarea ca exercițiu. Se va lua, de exemplu, cazul $\frac{\partial}{\partial\sigma_1}$. Se va ține seamă că din mărginirea mulțimii E în $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$ rezultă mărginirea în $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ a mulțimii elementelor de forma

$$\frac{z(t,\sigma_1+\lambda,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)-z(t,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}{\lambda}$$

unde $z\in E$, $s\in Q_2$ și $|\lambda|\leqslant 1$.

Mulțimea $\mathscr{D}(\mathbf{R}^m)\otimes\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ *este densă în spațiul* $\mathscr{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$.

Demonstrația, pe care doar o schițăm, este în cazul $m=n=1$, $\Gamma=\mathbf{K}$, următoarea:

Fie $z\in\mathscr{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^2)$. Dacă punem

$$\varphi_n(t,\,s)=\frac{n^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}z(\xi,\,\eta)\exp\left(-\frac{n^2}{4}\left[(t-\xi)^2+(s-\eta)^2\right]\right)\mathrm{d}\,\xi\mathrm{d}\,\eta$$

atunci $\lim_n \varphi_n(t,s)=z(t,s)$ uniform și

$$\lim_n\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi_n(t,\,s)}{\partial t^{\alpha}\,\partial s^{\beta}}=\frac{\partial^{\alpha+\beta}z(t,\,s)}{\partial t^{\alpha}\,\partial s^{\beta}}\,.$$

de asemenea uniform (pentru fiecare pereche α, β de numere naturale sau nule). Funcția φ_n se poate dezvolta în serie de forma

$$\varphi_n(t,\,s)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q}c_{nj}t^j s^{q-j}$$

Pentru fiecare n putem considera o sumă parțială $\psi_n(t,\,s)$ a acestei serii așa ca $\lim_n\psi_n=z$ în spațiul $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$. Considerînd funcțiile $\gamma_1,\ \gamma_2\in\mathscr{D}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R})$ așa ca $\gamma_1(t)\gamma_2(s)=1$ pe suportul lui z și punînd $z_n(t,\,s)=\psi_n(t,\,s)\gamma_1(t)\gamma_2(s)$ vom avea $\lim_n z_n=z$ în spațiul $\mathscr{D}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^2)$.

Propoziția 2.3.2. *Produsul direct este comutativ și asociativ.*

Într-adevăr fie f o distribuție pe $\mathbf{R}^m$ și g o distribuție pe $\mathbf{R}^n$. Dacă

$$z(t,\,s)=\sum_{j=1}^{k}x_j(t)y_j(s)$$

unde $x_j\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$ și $y_j\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, atunci

$$(f\times g,\,z)=\sum_{j=1}^{k}(f,\,x_j)(g,\,y_j)=(g\times f,\,z).$$

Din continuitatea funcționalelor $f\times g$, $g\times f$ și din faptul că $\mathscr{D}(\mathbf{R}^m)\otimes\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ este densă în $\mathscr{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$ rezultă că $f\times g=g\times f$.

Asociativitatea se stabilește în mod analog, considerînd mai întîi funcții de forma

$$w(t,\,s,\,r)=\sum_{j=1}^{k}x_j(t)y_j(s)z_j(r)$$

cu $x_j\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$, $y_j\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, $z_j\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^p)$.

Exemple. (1) Dacă f este distribuția lui Dirac pe $\mathbf{R}^m$ iar g distribuția lui Dirac pe $\mathbf{R}^n$, atunci $f\times g$ este distribuția lui Dirac pe $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$.

Verificarea este imediată.

(2) Dacă δ este distribuția lui Dirac pe $\mathbf{R}^m$, iar $\mathbf{1}$ este distribuția definită de funcția identic unu pe $\mathbf{R}^n$ atunci

$$(\delta\times\mathbf{1},\,z)=\int_{\mathbf{R}^n}z(0,\,s)\mathrm{d}s$$

oricare ar fi $z\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

2.4. CONVOLUȚIA A DOUĂ DISTRIBUȚII

Fie f și g distribuții pe $\mathbf{R}^m$.

Pentru orice $x \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$, funcția y dată de formula

$$y(s) = (f(t), x(t+s)), \quad (s \in \mathbf{R}^m) \tag{2.3}$$

aparține lui $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$. Însă ea nu are, în general, suport compact. Dacă distribuția f are suport compact, atunci y are suport compact deci $y \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^m)$. În acest caz are sens (g, y). Dacă însă f nu are suport compact, dar dacă g are suport compact, atunci are de asemenea sens (g, y), în baza teoremei 1.4.1.

Definiția 2.4.1. *Fie f și g două distribuții pe $\mathbf{R}^m$ dintre care cel puțin una are suport compact. Se numește convoluția distribuțiilor f și g se notează $f * g$ distribuția definită de formula*

$$(f * g, x) = (g(s), (f(t), x(t+s))), \quad (x \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)) \tag{2.4}$$

Din definiție rezultă că

$$(f * g, x) = ((f \times g)(t, s), x(t+s)), \quad (x \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^m))$$

Din propoziția 2.3.2. rezultă că convoluția a două distribuții este comutativă, iar pentru trei distribuții (dintre care cel puțin două au suport compact) convoluția este asociativă. Este evident că $f * \delta = f$ oricare ar fi distribuția f.

Se verifică, de asemenea, imediat următoarele:

Dacă $g = (\sigma^*)\text{-}\lim\limits_n g_n$ și dacă f este o distribuție cu suport compact, atunci $f * g = (\sigma^*)\text{-}\lim\limits_n f * g_n$.

Dacă f și g sînt distribuții de o variabilă, dintre care una cu suport compact, atunci

$$(f * g)' = f' * g = f * g'.$$

Să considerăm, ca aplicație, o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$f^{(n)} + \alpha_1 f^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n f = g \tag{2.5}$$

unde f și g se pot considera distribuții pe $\mathbf{R}$.

Fie f_0 o soluție a acestei ecuații, cînd înlocuim pe g cu δ. Atunci pentru orice distribuție g cu suport compact, distribuția $f = f_0 * g$ este o soluție a ecuației (2.5).

Verificarea se face imediat, folosind proprietățile convoluției.

Observație. Dacă f și g sînt două distribuții pe R, ambele avînd suportul mărginit la stînga (sau la dreapta), atunci putem defini $f * g$, formula (2.4) avînd sens.

Într-adevăr, dacă f are suport mărginit la stînga, atunci funcția y dată de formula (2.3) are suport mărginit la dreapta. Dar g se poate prelungi pe submulțimea lui $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$ formată din toate funcțiile cu suport mărginit la dreapta, prin aceeași metodă prin care distribuțiile cu suport compact se prelungesc pe $\mathbf{C}^\infty(T)$ (teorema 1.4.1).

Scanned with OKEN Scanner

2.5. TRANSFORMATA FOURIER A UNEI DISTRIBUȚII TEMPERATE

Dacă o funcție măsurabilă $x : \mathbf{R}^m \to \mathbf{K}$ este absolut integrabilă, se numește *transformata Fourier* a lui x, funcția $\widetilde{x} : \mathbf{R}^m \to \mathbf{K}$, dată de formula

$$\widetilde{x}(s) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbf{R}^m} e^{-i\langle s,\, t\rangle} x(t)\,dt$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar care generează norma euclidiană în $\mathbf{R}^m$.

Se poate demonstra că pentru orice funcție care descrește rapid, transformata Fourier este de asemenea o funcție care descrește rapid.

Să considerăm, pentru simplificare, cazul $m = 1$,

Dacă $x \in \mathcal{S}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$, atunci evident $\widetilde{x} \in \mathbf{C}^{\infty}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$. Se verifică apoi cu ușurință că

$$\widetilde{x^{(p)}}(s) = i^p s^p \widetilde{x}(s).$$

Notînd

$$y_{p,k}(t) = \frac{d^p}{dt^p}(t^k x(t))$$

și folosind expresia derivatei de ordinul k a lui $\widetilde{x}$, deducem imediat

$$y_{p,k}(s) = i^{k+p} s^p \frac{d^k}{ds^k} \widetilde{x}(s)$$

de unde rezultă că $\widetilde{x}$ descrește rapid.

Definiția 2.5.1. *Dacă f este o distribuție temperată pe $\mathbf{R}^m$, se numește transformata Fouriei a lui f, distribuția temperată $\widetilde{f}$ dată de formula*

$$(\widetilde{f},\ x) = (f,\ \widetilde{x}),\quad (x \in \mathcal{S}_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^m))$$

De exemplu, se verifică imediat că

$$\widetilde{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \mathbf{1}$$

(unde δ este distribuția lui Dirac pe $\mathbf{R}^m$ iar $\mathbf{1}$ este distribuția definită de funcția identic unu pe $\mathbf{R}^m$).

Dacă o funcție măsurabilă $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{K}$ este absolut integrabilă și considerăm distribuția temperată definită de funcția φ (a se vedea 1.5, exemplu), atunci distribuția $\widetilde{f}$ este definită de funcția $\widetilde{\varphi}$.

Verificarea este imediată.

Complemente și exerciții. (1) Fie $\mathbf{L}^2_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^m)$ spațiul Hilbert al claselor de funcții măsurabile $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{K}$, de pătrat integrabil, cu norma

$$\|\varphi\| = \left(\int_{\mathbf{R}^m} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Această normă este generată de produsul scalar

$$\langle \varphi,\ \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^m} \varphi(t)\overline{\psi(t)}\,dt$$

Scanned with OKEN Scanner

Spaţiul $\mathcal{S}_K(\mathbf{R}^m)$ se poate identifica cu un subspaţiu liniar dens al spaţiului $\mathbf{L}^2_K(\mathbf{R}^m)$.

Fie $\varphi \in \mathbf{L}^2_K(\mathbf{R}^m)$ şi să considerăm distribuţia temperată f definită de φ (a se vedea 1.5, exemplu). Avem

$$|(\widetilde{f},\ x)| \leqslant ||\varphi||\ ||x||,\ (x \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m))$$

şi $\widetilde{f}$ se poate prelungi pe $\mathbf{L}^2_K(\mathbf{R}^m)$ cu păstrarea liniarităţii, continuităţii şi normei. Vom nota tot cu $\widetilde{f}$ prelungirea considerată. În baza teoremei 3.1.1 cap. VI, există un element $\overset{\vee}{\varphi} \in \mathbf{L}^2_K(\mathbf{R}^m)$ şi numai unul aşa ca

$$(\widetilde{f},\ x) = \int_{\mathbf{R}^m} x(t)\overset{\vee}{\varphi}(t)\mathrm{d}t,\ (x \in \mathbf{L}^2_K(\mathbf{R}^m))$$

Funcţia $\overset{\vee}{\varphi}$ se numeşte transformata Fourier a funcţiei φ.

Se observă că dacă pentru $\lambda > 0$ punem

$$\varphi_\lambda(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{dacă } ||t|| \leqslant \lambda \\ 0 & \text{dacă } ||t|| > \lambda \end{cases}$$

atunci

$$\lim_{\lambda \to +\infty} ||\overset{\vee}{\varphi_\lambda} - \overset{\vee}{\varphi}|| = 0.$$

Cu această observaţie se poate stabili egalitatea

$$\overset{\vee}{\varphi}(s) = (\mathbf{mp})\text{-}\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{|t| \leqslant \lambda} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s,\,t)}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

unde „(mp)-lim" înseamnă limita în medie pătratică.

(2) Se poate demonstra că dacă f este o distribuţie pe $\mathbf{R}^m$ cu suport compact, atunci transformata Fourier $\widetilde{f}$ a lui f este distribuţia definită de funcţia

$$\psi(s) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}(f(t),\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t,\,s)}),\ (s \in \mathbf{R}^m)$$

şi are loc egalitatea

$$\widetilde{f * g} = (2\pi)^{m/2}\widetilde{f}\cdot\widetilde{g}$$

oricare ar fi distribuţia temperată g.

Transformata Fourier a distribuţiilor are aplicaţii importante în studiul ecuaţiilor diferenţiale, în unele probleme ale fizicii (de exemplu în problema difracţiei la infinit sau în alte probleme ale opticii), în teoria sistemelor dinamice care intervin în automatică.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX

OPERATORI NELINIARI

În acest capitol vom considera operatori neliniari între spații local convexe sau normate, făcînd o introducere în teoria punctelor fixe și în teoria operatorilor monotoni.

§ 1. PUNCTE FIXE PENTRU OPERATORI NELINIARI

1.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Dacă E este o submulțime a unei mulțimi F, iar $U: E \to F$ o aplicație oarecare, se spune că U are un *punct fix*, dacă există un element $x_0 \in E$ așa ca $U(x_0)=x_0$. Elementul x_0 se numește punct fix pentru U.

Vom considera spațiul $\mathbf{R}^m$ cu norma obișnuită.

Lema 1.1.1. (*L. Brouwer*). *Orice aplicație continuă a sferei unitate închise din* $\mathbf{R}^m$ *în ea însăși, are un punct fix.*

Demonstrație. Să notăm cu S sfera unitate închisă a lui $\mathbf{R}^m$ și cu $\mathscr{C}_0$ mulțimea aplicațiilor continue $U: S \to S$. Fie $\mathscr{C}_\infty$ submulțimea lui $\mathscr{C}_0$ a aplicațiilor $U=(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ unde f_j: $S \to \mathbf{R}$, $(j=1, 2, \ldots, m)$ și fiecare f_j admite derivate parțiale continue de orice ordin. Cu teorema lui Stone-Weierstrass, se deduce că dacă $U \in \mathscr{C}_0$, atunci există un șir $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ cu $U_n \in \mathscr{C}_\infty$ așa ca $\lim_n U_n(x)=U(x)$ uniform pe S.

Pentru a demonstra lema, fie mai întîi $U \in \mathscr{C}_\infty$.

Să presupunem că U nu ar avea un punct fix. În acest caz, să considerăm următoarea ecuație de gradul doi în λ:

$$||\lambda(x-U(x))+x||^2=1$$

care se mai poate scrie (folosind produsul scalar care generează norma)

$$||x-U(x)||^2\lambda^2+2\langle x-U(x),\ x\rangle\lambda+||x||^2-1=0 \tag{1.1}$$

Să notăm cu $\mu(x)$ discriminantul ecuației (1.1) adică

$$\mu(x)=\langle x-U(x),\ x\rangle^2+||x-U(x)||^2(1-||x||^2)$$

Deoarece $U(x)\neq x$, $\forall x\in S$, rezultă imediat că dacă $||x||<1$ atunci $\mu(x)>0$. Dacă $||x||=1$, atunci $\langle U(x),\ x\rangle\neq 1$ deoarece[1] $||U(x)||\leqslant 1$ iar $U(x)\neq x$. Rezultă

$$\langle x-U(x),\ x\rangle\neq 0$$

și deci $\mu(x)>0$. În concluzie $\mu(x)>0$, $\forall x\in S$.

Să notăm cu $\lambda_0(x)$ cea mai mare dintre rădăcinile ecuației (1.1) adică soluția dată de formula

$$\lambda_0(x)=\frac{\langle U(x)-x,\ x\rangle+\sqrt{\mu(x)}}{||x-U(x)||^2}.$$

Este evident că dacă $||x||=1$, atunci $\lambda_0(x)=0$. Considerînd deci funcția f: $\mathbf{R}\times S\to\mathbf{R}^m$ dată de formula

$$f(\alpha,\ x)=\alpha\lambda_0(x)(x-U(x))+x$$

rezultă

$$||x||=1\Rightarrow\frac{\partial f(\alpha,\ x)}{\partial\alpha}=0 \tag{1.2}$$

Vom nota

$$D_j=\frac{\partial}{\partial\xi_j},\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

unde $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_m)$.

Să considerăm acum determinantul de ordin m în care linia f este vectorul $D_jf(\alpha,\ x)$. Notînd cu $\varphi(\alpha,\ x)$ acest determinant și punînd

$$\psi(\alpha)=\int\ \ldots\int_S\varphi(\alpha,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_m)\mathrm{d}\,\xi_1,\ \ldots,\ \mathrm{d}\,\xi_m \tag{1.3}$$

este evident că $\psi(0)\neq 0$ (căci $\psi(0)$ este volumul lui S). Pe de altă parte $\psi(1)=0$ căci $\varphi(1;\ x)\equiv 0$. Într-adevăr, fie

$$f(\alpha,\ x)=(f_1(\alpha,\ x),\ f_2(\alpha,\ x)\ \ldots f_m(\alpha,\ x))$$

cu f_j: $\mathbf{R}\times S\to\mathbf{R}$. Deoarece $||f(1,\ x)||\equiv 1$, punînd $g_j(x)=f_j(1,\ x)$ funcțiile g_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ sînt în dependență funcțională, deci jacobianul lor $\varphi(1;\ x)$ este identic nul.

Să observăm acum că dacă notăm cu $\varphi_j(\alpha,\ x)$ determinantul de ordinul m în care liniile sînt vectorii $D_if(\alpha,\ x)$, $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ j-1,\ j+1,\ \ldots,\ m)$ unde $D_0=\frac{\partial}{\partial\alpha}$ atunci

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^jD_j\varphi_j(\alpha,\ x)=0$$

Cu această observație se poate arăta că[2] $\psi'(\alpha)=0$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}$. Rezultă că funcția ψ este constantă, ceea ce este contradictoriu.

---

[1] Dacă $||a||\leqslant 1$, $||b||\leqslant 1$ și $\langle a,\ b\rangle=1$, atunci $a=b$.

[2] Se deduce că $\psi'(\alpha)$ este o sumă de integrale de forma (1.3) în care $\varphi(\alpha,\ x)$ se înlocuiește cu $\pm D_j\varphi_j(\alpha,\ x)$, (cu $j\neq 0$). Se pune $y_j^k=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{j-1},\ (-1)^{k-1}(1-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\xi_i)^{1/2},\ \xi_{j+1},\ \ldots,\ \xi_m)$ și se observă că $||y_j^k||=1$. Integrala pe S a lui $D_j\varphi_j(\alpha,\ x)$ (cu $j\neq 0$) se reduce la integrala funcției $\varphi_j(\alpha,\ y_j^1)-\varphi_j(\alpha,\ y_j^2)$, pe sfera unitate închisă S_j a spațiului $(m-1)$-dimensional al elementelor $x=\{\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{j-1},\ \xi_{j+1},\ \ldots,\ \xi_m\}$. Se ține apoi seama de (1.2).

Scanned with OKEN Scanner

Am demonstrat deci că dacă $U \in \mathscr{C}_\infty$ atunci U are un punct fix. Dacă $U \in \mathscr{C}_0$ atunci fie $\{U_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ cu $U_n \in \mathscr{C}_\infty$ astfel ca $U(x) = \lim\limits_n U_n(x)$ uniform pe S. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ există $x_n \in S$ așa ca $U_n(x_n) = x_n$. Mulțimea S fiind compactă, există un subșir $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ al șirului $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, care converge către un element $x_0 \in S$. Din convergența uniformă a șirului $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ deducem[1]

$$U(x_0) = \lim_n U_{j_n}(x_{j_n}) = \lim_n x_{j_n} = x_0$$

adică x_0 este un punct fix pentru U.

Observație. Lema 1.1.1 se menține dacă se înlocuiește spațiul $\mathbf{R}^m$ prin spațiul $\mathbf{K}^m$.

Într-adevăr, este suficient să aplicăm lema pentru spațiul $\mathbf{R}^{2m}$.

Vom considera acum spațiul $(\mathbf{l}^2_\Gamma)$ cu norma obișnuită. Prin *paralelipiped hilbertian* vom înțelege următoarea submulțime a spațiului $(\mathbf{l}^2_\Gamma)$:

$$H = \left\{ x = \{\xi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \,|\, |\xi_n| \leqslant \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Vom spune că un spațiu topologic E are *proprietatea de punct fix*, dacă orice aplicație continuă $U\colon E \to E$ are un punct fix.

Lema 1.1.2. *Dacă E este o submulțime convexă și închisă a paralelipipedului hilbertian H, atunci E are proprietatea de punct fix.*

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că H are proprietatea de punct fix. Fie deci $U\colon H \to H$ o aplicație continuă și pentru orice $n \in \mathbf{N}$ să considerăm aplicația $U_n\colon H \to H$ dată de formula

$$U_n(\{\xi_j\}_{j\in\mathbf{N}}) = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$$

Dacă S_n este sfera unitate închisă a spațiului Γ^n iar $H_n = U_n(H)$, atunci H_n și S_n sînt homeomorfe. Cum aplicația $U_n U\colon H_n \to H_n$ este continuă, ea are un punct fix x_n (în baza lemei 1.1.1 și a observației la această lemă). Deoarece $U(x_n) \in H$ iar $x_n = U_n(U(x_n))$ avem

$$\|U(x_n) - x_n\| \leqslant \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \tag{1.4}$$

Mulțimea H fiind compactă, există un subșir $\{x_{j_n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ al șirului $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ convergent către un element $x_0 \in H$. Cu (1.4) rezultă imediat $U(x_0) = x_0$, deoarece U este continuă.

Să considerăm acum o submulțime convexă și închisă E a lui H. Pentru orice element $x \in H$ există un element $x' \in E$ și numai unul așa ca $d(x, E) = d(x, x')$ (a se vedea Cap. VI, lema 1.4.1). Vom pune $U_0(x) = x'$. Aplicația $U_0\colon H \to E$ este continuă. Într-adevăr fie $x = \lim\limits_n x_n$. Mulțimea E fiind compactă, șirul $\{U_0(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ conține un subșir convergent. Fie $y = \lim\limits_n U_0(x_{j_n})$. Avem

$$\|x_{j_n} - U_0(x_{j_n})\| = d(x_{j_n}, E) \leqslant d(x_{j_n}, U_0(x)) \leqslant \|x_{j_n} - x\| + \|x + U_0(x)\|$$

de unde rezultă

$$\|x - y\| \leqslant \|x - U_0(x)\|.$$

Cu definiția lui $U_0(x)$ rezultă $y = U_0(x)$. Deci dacă considerăm un subșir oarecare $\{U_0(x_{k_n})\}_{n\in\mathbf{N}}$ al șirului $\{U_0(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$, cu raționamentul precedent

---

[1] Folosim inegelitatea

$$\|U_{j_n}(x_{j_n}) - U(x_0\| \leqslant \|U_{j_n}(x_{j_n}) - U(x_{j_n})\| + \|U(x_{j_n}) - U(x_0)\|$$

există un subșir al șirului $\{U_0(x_{k_n})\}_{n\in\mathbf{N}}$ care converge către $U_0(x)$. Rezultă $U_0(x)=\lim\limits_n U_0(x_n)$, deci U_0 este continuă.

Fie acum o aplicație continuă $U\colon E\to E$. Aplicația $UU_0\colon H\to E$ este de asemenea continuă și cu cele arătate la începutul demonstrației, ea are un punct fix x^*. Deoarece $x^*\in E$, avem $U_0(x^*)=x^*$ și deci

$$U(x^*)=U(U_0(x^*))=x^*.$$

Teorema este demonstrată.

1.2. TEOREMA DE PUNCT FIX A LUI SCHAUDER-TIHONOV

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu local convex separat, E o submulțime convexă și slab compactă a lui $\mathfrak{X}$ iar $U\colon E\to E$ un operator slab continuu.

Dacă $\mathcal{G}_0$ este o submulțime finită a spațiului conjugat $\mathfrak{X}^*$ iar $0<\eta\in\mathbf{R}$, vom nota

$$W(\mathcal{G}_0;\ \eta)=\{x\in\mathfrak{X}\,|\,|g(x)|<\eta,\ \forall g\in\mathcal{G}_0\}$$

care este o vecinătate a originii în topologia slabă pe $\mathfrak{X}$.

Fie $\mathcal{F},\mathcal{G}\subset\mathfrak{X}^*$. Vom spune că $\mathcal{F}$ are proprietatea (C) în raport cu perechea $\{\mathcal{G},\ U\}$ dacă pentru orice $f\in\mathcal{F}$ și orice număr $\varepsilon>0$, există o parte finită $\mathcal{G}_0\subset\mathcal{G}$ și un număr $\eta>0$ astfel ca, dacă $x',\ x''\in E$ iar $x'-x''\in W(\mathcal{G}_0;\ \eta)$ atunci

$$|f(U(x'))-f(U(x''))|<\varepsilon.$$

Lema 1.2.1. *Pentru orice $f\in\mathfrak{X}^*$ există o mulțime numărabilă $\mathcal{G}\subset\mathfrak{X}^*$ astfel ca $f\in\mathcal{G}$ iar $\mathcal{G}$ să aibă proprietatea (C) în raport cu perechea $\{\mathcal{G},\ U\}$.*

Demonstrație. Pentru orice $f\in\mathfrak{X}^*$ există o mulțime numărabilă $\mathcal{G}'\subset\mathfrak{X}^*$ astfel ca f să aibă proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}',\ U\}$. Într-adevăr funcția $\varphi\colon E\to\Gamma$ dată de formula $\varphi(x)=f(U(x))$, este uniform slab-continuă pe E. Pentru orice $n\in\mathbf{N}$ există deci o parte finită $\mathcal{G}_n\subset\mathfrak{X}^*$ și un număr $\eta_n>0$ astfel ca din $x',\ x''\in E$ și $x'-x''\in W(\mathcal{G}_n;\ \eta_n)$ să rezulte

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{1}{n}$$

Punînd $\mathcal{G}'=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{G}_n$ rezultă că f are proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}',\ U\}$.

Dacă se consideră o submulțime numărabilă $\mathcal{F}\subset\mathfrak{X}^*$, atunci cu cele arătate, deducem imediat că există o submulțime numărabilă $\mathcal{G}''\subset\mathfrak{X}^*$ astfel ca $\mathcal{F}$ să aibă proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}'',\ U\}$.

Fie acum $f\in\mathfrak{X}^*$ și să considerăm o submulțime numărabilă $\mathcal{G}_1'\subset\mathfrak{X}^*$ astfel ca f să aibă proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}_1',\ U\}$. Pentru $\mathcal{G}_1'$ există submulțime numărabilă $\mathcal{G}_2'\subset\mathfrak{X}^*$ astfel ca $\mathcal{G}_1'$ să aibă proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}_2',\ U\}$. Continuînd procedeul, obținem un șir $\{\mathcal{G}_n'\}_{n\in\mathbf{N}}$ de submulțimi numărabile din $\mathfrak{X}^*$ și punînd

$$\mathcal{G}=\{f\}\cup\Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{G}_n'\Big)$$

obținem mulțimea $\mathcal{G}$ din enunțul lemei.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.2.1. (*J. Schauder-A. Tihonov*). *Dacă E este o submulțime convexă și compactă a unui spațiu local convex separat $\mathfrak{X}$, atunci orice operator continuu $U: E \to E$ are un punct fix.*

Demonstrație. Vom arăta că dacă E conține cel puțin două puncte diferite x_1, x_2, atunci există o submulțime proprie $E_1 \subset E$, convexă și închisă, astfel ca $U(E_1) \subset E_1$.

Fără restrîngerea generalității putem considera în $\mathfrak{X}$ topologia slabă[1].

Fie $f \in \mathfrak{X}^*$ astfel ca $f(x_1) \neq f(x_2)$. În baza lemei 1.2.1, există o submulțime numărabilă $\mathcal{G} \subset \mathfrak{X}^*$ astfel ca $\mathcal{G}$ să aibă proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}, U\}$ iar $f \in \mathcal{G}$. Fie $\mathcal{G} = \{g_n | n \in \mathbf{N}\}$. Deoarece mulțimea E este compactă, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ mulțimea $g_n(E)$ este mărginită. Putem deci presupune (în caz contrar înmulțim g_n cu un număr convenabil) că

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}, \quad (x \in E; \ n \in \mathbf{N})$$

Să considerăm paralelipipedul hilbertian H și aplicația $V: E \to (l_1^2)$ dată de formula $V(x) = \{g_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Această aplicație este continuă iar mulțimea $E_0 = V(E)$ este o submulțime convexă și închisă a lui H și conține cel puțin două puncte.

Să observăm acum că dacă pentru două elemente $x', x'' \in E$ avem $V(x') = V(x'') = y$ atunci

$$VU(x') = VU(x'') \tag{1.5}$$

Într-adevăr, avem $g_n(x') = g_n(x'')$, $\forall n \in \mathbf{N}$ și cum $\mathcal{G}$ are proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}, U\}$ se deduce cu ușurință că

$$g_n(U(x')) = g_n(U(x'')), \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

deci are loc (1.5).

Vom considera aplicația $U_0: E_0 \to E_0$ dată de formula:

$$U_0(y) = VU(V^{-1}(y)), \quad (y \in E_0)$$

a cărei definiție se bazează pe observația precedentă.

Operatorul U_0 este continuu. Într-adevăr, fie $y_0 \in E_0$ și $\varepsilon \in (0, 1)$. Să considerăm $n_0 \in \mathbf{N}$ așa ca

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Deoarece $\mathcal{G}$ are proprietatea (C) în raport cu $\{\mathcal{G}, U\}$, există $m \in \mathbf{N}$ și $\eta > 0$ așa ca din $x, x_0 \in E$ și

$$|g_i(x) - g_i(x_0)| < \eta, \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.6}$$

să rezulte

$$|g_j(U(x)) - g_j(U(x_0))| < \left(\frac{\varepsilon}{n_0}\right)^{1/2}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n_0) \tag{1.7}$$

[1] Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu topologic compact, iar $\mathcal{Y}$ un spațiu topologic separat, atunci orice aplicație biunivocă și continuă a lui $\mathfrak{X}$ pe $\mathcal{Y}$ este un homeomorfism. Pe de altă parte, dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu local convex separat, cu topologia τ, iar σ este topologia slabă pe $\mathfrak{X}$, atunci aplicația identitate de la $\mathfrak{X}(\tau)$ la $\mathfrak{X}(\sigma)$ este continuă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $y=V(x)$ și $y_0=V(x_0)$, iar $||y-y_0||<\eta$, atunci are loc (1.6) și deci rezultă (1.7). Cum

$$U_0(y)=VU(V^{-1}(y))=V(U(x))=\{g_j(U(x))\}_{j\in N}$$

rezultă

$$||U_0(y)-U_0(y_0)||^2\leqslant \sum_{j=1}^{n_0}|g_j(U(x))-g_j(U(x_0))|^2+\sum_{j=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}<2\varepsilon$$

și deci U_0 este continuu.

În baza lemei 1.1.2 operatorul U_0 are un punct fix a_0 și notînd $E_1=V^{-1}(a_0)$ avem

$$U(E_1)\subset V^{-1}V(U(E_1))=V^{-1}(U_0(a_0))=V^{-1}(a_0)=E_1$$

Mulțimea E_1 este convexă și închisă și $U(E_1)\subset E_1$. Mulțimea E_1 este o submulțime proprie a lui E. Într-adevăr, dacă am avea $E_1=E$ ar rezulta $\{a_0\}=E_0$ ceea ce contrazice faptul că E_0 are cel puțin două elemente. Cu *teorema lui Zorn*, există o submulțime convexă închisă minimală E' a lui E așa ca $U(E')\subset E'$ și cu cele arătate mai înainte rezultă că această mulțime E' va conține un singur punct a. Deci U are un punct fix.

Teorema este demonstrată.

§ 2. OPERATORI MONOTONI

În acest paragraf vom nota cu $\mathfrak{X}$ un spațiu Banach real, reflexiv. Vom considera spațiul conjugat $\mathfrak{X}^*$ și pentru $f\in\mathfrak{X}^*$ și $x\in\mathfrak{X}$ vom nota (f, x) în loc de $f(x)$. Vom considera operatori definiți pe $\mathfrak{X}$ cu valori în $\mathfrak{X}^*$.

2.1. OPERATORI MONOTONI ȘI OPERATORI HEMICONTINUI

Definiția 2.1.1. *Un operator* $U\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{X}^*$ *se numește monoton, dacă*

$$(U(x_1)-U(x_2),\ x_1-x_2)\geqslant 0$$

oricare ar fi $x_1, x_2\in\mathfrak{X}$.

Exemple. Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert real și A o submulțime convexă și închisă a lui $\mathfrak{X}$. Pentru orice element $x\in\mathfrak{X}$ să notăm cu $M(x)$ elementul de cea mai bună aproximare în A pentru x, adică elementul $M(x)\in A$ pentru care

$$d(x, M(x))=d(x, A)$$

unde d înseamnă distanța. Pentru orice x, elementul $M(x)$ există și este unic (cap. VI, lema 1.4.1). Operatorul $M\colon \mathfrak{X}\to A$ (adică $x\to M(x)$) este monoton (identificînd $\mathfrak{X}^*$ cu $\mathfrak{X}$ prin aplicația $f\to y$ dată de relația: $(f, x)=\langle y, x\rangle$, $\forall x\in\mathfrak{X}$).

Într-adevăr, pentru orice $x\in\mathfrak{X}$ și $a\in A$ avem

$$||x-M(x)||\leqslant||x-a||$$

deci

$$||x_1 - M(x_1)||^2 \leqslant ||x_1 - M(x_2)||^2$$
$$||x_2 - M(x_2)||^2 \leqslant ||x_2 - M(x_1)||^2$$

Adunînd ultimele două inegalităţi şi exprimînd norma cu ajutorul produsului scalar, obţinem

$$\langle M(x_1) - M(x_2),\ x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0$$

deci M este monoton.

Un alt exemplu de operator monoton va fi dat în secţiunea 2.2.

Definiţia 2.1.2. *Un operator* $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$ *se zice hemicontinuu, dacă*

$$\lim_{\lambda \to 0} (U(a+\lambda b),\ x) = (U(a),\ x) \tag{2.1}$$

oricare ar fi elementele a, b, x *din spaţiul*[1] $\mathfrak{X}$.

Propoziţia 2.1.1. *Dacă* $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$ *este un operator hemicontinuu şi dacă pentru anumite elemente* $x_0 \in \mathfrak{X}$ *şi* $f_0 \in \mathfrak{X}^*$ *avem*

$$(U(x) - f_0,\ x - x_0) \geqslant 0,\ (\forall x \in \mathfrak{X}) \tag{2.2}$$

atunci $U(x_0) = f_0$.

Demonstraţie. Fie $x \in \mathfrak{X}$ şi pentru orice număr $\lambda > 0$ să punem $x_\lambda = x_0 + \lambda x$. Cu (2.2) avem

$$(U(x_\lambda) - f_0,\ x_\lambda - x_0) \geqslant 0,\ \forall \lambda > 0$$

deci

$$\lambda (U(x_\lambda) - f_0,\ x) \geqslant 0,\ \forall \lambda > 0,$$

de unde

$$(U(x_\lambda),\ x) \geqslant (f_0,\ x),\ \forall \lambda > 0.$$

Deoarece U este hemicontinuu, deducem

$$(U(x_0),\ x) \geqslant (f_0,\ x).$$

Înlocuind x cu $-x$ obţinem inegalitatea contrară, de unde deducem imediat $U(x_0) = f_0$

Propoziţia 2.1.2. *Dacă* $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$ *este un operator monoton, hemicontinuu şi mărginit*[2], *atunci din* $\lim_n x_n = x_0$ *rezultă*[3]

$$(\sigma^*)\text{-}\lim_n U(x_n) = U(x_0).$$

Demonstraţie. Fie $\lim_n x_n = x_0$. Şirul $\{U(x_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ este atunci mărginit (în normă), în spaţiul $\mathfrak{X}^*$. Pe de altă parte sfera unitate închisă a acestui spa-

---

[1] Deoarece (2.1) are loc $\forall x \in \mathfrak{X}$, se poate scrie $(\sigma^*)\text{-}\lim_{\lambda \to 0} U(a+\lambda b) = U(a)$, unde $\sigma^* = \sigma(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{X})$.

[2] Amintim că un operator U se numeşte operator mărginit dacă aplică mulţimi mărginite în mulţimi mărginite (Cap. IV, 1.1, Observaţii). În $\mathfrak{X}^*$ se consideră norma obişnuită.

[3] Notăm prin $\lim x_n$ limita în topologia normei în $\mathfrak{X}$ şi prin $(\sigma^*)\text{-}\lim_n y_n$ limita în topologia slabă $\sigma^* = \sigma(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{X})$ a unui şir $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de elemente din $\mathfrak{X}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

ţiu este compactă în topologia σ^* (a se vedea Cap. IV, teorema 2.3.3). Din şirul $\{U(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ se poate deci extrage un subşir slab convergent. Fie $(\sigma^*)\text{-}\lim_n U(x_{j_n})=f_0$. Operatorul U fiind monoton

$$(U(x)-U(x_{j_n}),\ x-x_{j_n})\geqslant 0, \qquad \forall x\in\mathcal{X}.$$

Trecînd la limită obţinem

$$(U(x)-f_0,\ x-x_0)\geqslant 0,\ \forall x\in\mathcal{X}.$$

Cu propoziţia 2.1.1 avem $U(x_0)=f_0$, deci $U(x_0)=(\sigma^*)\text{-}\lim_n U(x_{j_n})$.

Considerînd un subşir oarecare $\{U(x_{k_n})\}_{n\in\mathbf{N}}$ al şirului $\{U(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$, din $\lim_n x_{k_n}=x_0$ rezultă că există un subşir al şirului $\{U(x_{k_n})\}_{n\in\mathbf{N}}$ convergent în topologia σ^* către $U(x_0)$ aşa cum s-a arătat mai înainte.

În concluzie $(\sigma^*)\text{-}\lim_n U(x_n)=U(x_0)$.

Propoziţia 2.1.3. *Dacă $\mathcal{X}$ este un spaţiu Banach real finit dimensional iar $U:\mathcal{X}\to\mathcal{X}^*$ un operator monoton şi hemicontinuu, atunci U este continuu pe $\mathcal{X}$.*

Demonstraţie. Operatorul U este mărginit. Într-adevăr, în caz contrar, fie A o submulţime mărginită a lui $\mathcal{X}$ pentru care $U(A)$ nu este mărginită. Există deci un şir $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de elemente din A aşa ca $\|U(a_n)\|\to+\infty$. Şirul $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ fiind mărginit într-un spaţiu finit dimensional, este relativ compact deci se poate extrage un subşir convergent. Fie $\lim_n a_{j_n}=a$. Operatorul U fiind monoton

$$(U(a_{j_n})-U(z),\ a_{j_n}-z)\geqslant 0,\ (\forall z\in\mathcal{X}) \tag{2.3}$$

Deoarece $\|U(a_{j_n})\|\to+\infty$, există $n_0\in\mathbf{N}$ aşa ca $U(a_{j_n})\neq\mathbf{0}$ pentru $n>n_0$. Să punem

$$f_{j_n}=\|U(a_{j_n})\|^{-1}\cdot U(a_{j_n}),\ (n\geqslant n_0).$$

Sfera unitate închisă în $\mathcal{X}^*$ fiind compactă, se poate extrage un subşir convergent din $\{f_{j_n}\}_{n\geq n_0}$. Fie $\lim_n f_{j_{k_n}}=f$. Din (2.3) rezultă pentru $n\geqslant n_0$

$$(f_{j_{k_n}}-\|U(a_{j_{k_n}})\|^{-1}U(z),\ a_{j_{k_n}}-z)\geqslant 0$$

oricare ar fi $z\in\mathcal{X}$. Trecînd la limită, obţinem

$$(f,\ a-z)\geqslant 0,\ \forall z\in\mathcal{X}$$

deci (înlocuind z prin $a-z$) $(f,\ z)\geqslant 0$, $(\forall z\in\mathcal{X})$. Elementul z fiind arbitrar avem şi $(f,\ -z)\geqslant 0$, $\forall z\in\mathcal{X}$, deci $(f,\ z)=0$, $\forall z\in\mathcal{X}$. Cu alte cuvinte $f=0$, ceea ce este contradictoriu, căci $\|f_{j_n}\|=1$, deci $\|f\|=1$.

Am demonstrat astfel că U aplică mulţimi mărginite în mulţimi mărginite. În baza propoziţiei 2.1.2, din $\lim_n z_n=z_0$ rezultă $\lim_n U(z_n)=U(z)$ (ţinînd seama că $\mathcal{X}^*$ este finit dimensional).

Definiția 2.2.1. *Un operator* $U : \mathscr{X} \to \mathscr{X}^*$ *se numește operator de tip* (*b*), *dacă este monoton, hemicontinuu și dacă*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(U(x), x)}{\|x\|} = +\infty \tag{2.4}$$

Lema 2.2.1. *Dacă* $\mathscr{X}$ *este un spațiu Banach real finit dimensional iar* $U : \mathscr{X} \to \mathscr{X}^*$ *este un operator continuu care satisface* (2.4), *atunci* $U(\mathscr{X}) = \mathscr{X}^*$.

Demonstrație. Putem presupune că $\mathscr{X}$ este un spațiu Hilbert, deoarece $\mathscr{X}$ este finit dimensional (considerînd, dacă este necesar, o normă echivalentă cu cea dată). În acest caz vom identifica $\mathscr{X}^*$ cu $\mathscr{X}$ prin aplicația $f \to y$ dată de relația $(f, z) = \langle y, z \rangle$, $\forall z \in \mathscr{X}$.

Vom arăta mai întîi că există un element $z \in \mathscr{X}$ așa ca $U(z) = \mathbf{0}$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că operatorul $I - U$ (unde I este operatorul identitate pe $\mathscr{X}$) are un punct fix.

Să notăm $V = I - U$. Operatorul U satisfăcînd (2.4), există un număr $\lambda > 0$ așa ca $\langle U(z), z \rangle \geqslant 0$ dacă $\|z\| \geqslant \lambda$. Din egalitatea

$$\langle V(z), z \rangle = \|z\|^2 - \langle U(z), z \rangle$$

rezultă

$$\|z\| \geqslant \lambda \Rightarrow \langle V(z), z \rangle \leqslant \|z\|^2 \tag{2.5}$$

Să notăm, ca de obicei cu $\overline{S}(\mathbf{0}; \lambda)$ sfera unitate închisă cu centrul $\mathbf{0}$ și raza λ (din spațiul $\mathscr{X}$) și să punem

$$E = \{z \in \overline{S}(\mathbf{0}; \lambda) \mid \|V(z)\| > \lambda\}.$$

Deoarece $E \subset \overline{S}(\mathbf{0}; \lambda)$ iar V este continuu, mulțimea $V(E)$ este mărginită, deci există un număr $\mu > \lambda$ așa ca

$$V(E) \subset \overline{S}(\mathbf{0}; \mu). \tag{2.6}$$

Fie

$$A = \{z \mid \|V(z)\| \leqslant \mu\}$$

și să considerăm operatorul $V_0 : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ definit astfel

$$V_0(z) = \begin{cases} V(z) & \text{dacă } z \in A \\ \mu \|V(z)\|^{-1} V(z) & \text{dacă } z \in \complement A \end{cases}$$

Operatorul V_0 este continuu și

$$V_0(\overline{S}(\mathbf{0}; \mu)) \subset \overline{S}(\mathbf{0}; \mu).$$

În baza lemei 1.1.1 operatorul V_0 are un punct fix $z_0 \in \overline{S}(\mathbf{0}; \mu)$. Vom arăta că z_0 este un punct fix și pentru V. Să observăm mai întîi că $E \subset A$ (în baza lui (2.6)), deci dacă $z_0 \in E$, atunci

$$z_0 = V_0(z_0) = V(z_0).$$

Punînd

$$F = \{z \in \overline{S}(\mathbf{0}; \lambda) \mid \|V(z)\| \leqslant \lambda\}$$

avem evident $F \subset A$ deci dacă $z_0 \in F$ atunci avem ca mai înainte $z_0 = V(z_0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum $z_0 \notin E \cup F$. Avem deci

$$\lambda < ||z_0|| \leqslant \mu.$$

Dacă $||V(z_0)|| \leqslant \mu$, atunci $z_0 \in A$ și deci avem ca și înainte, $z_0 = V(z_0)$. Rămîne de observat că inegalitatea $||V(z_0)|| > \mu$ nu poate avea loc. Într-adevăr, dacă ar avea loc, atunci punînd

$$\alpha = \mu ||V(z_0)||^{-1}$$

avem $0 < \alpha < 1$ și

$$V_0(z_0) = \alpha V(z_0).$$

Deci

$$\langle z_0, z_0 \rangle = \langle V_0(z_0), z_0 \rangle = \alpha \langle V(z_0), z_0 \rangle$$

de unde rezultă

$$\langle V(z_0), z_0 \rangle > ||z_0||^2$$

Dar $||z_0|| > \lambda$ și cu (2.5) ajungem la o contradicție.

Am demonstrat deci că V are un punct fix, de unde rezultă că ecuația $U(z) = \mathbf{0}$ are soluție.

Pentru a arăta că ecuația $U(z) = f$ are soluție oricare ar fi $f \in \mathscr{Z}$, vom considera pentru fiecare f operatorul $U_f : \mathscr{Z} \to \mathscr{Z}$ dat de formula

$$U_f(z) = U(z) - f, \qquad (z \in \mathscr{Z}).$$

Acest operator este evident continuu. Avem

$$\frac{\langle U_f(z), z \rangle}{||z||} = \frac{\langle U(z), z \rangle}{||z||} - \frac{\langle f, z \rangle}{||z||} \geqslant \frac{\langle U(z), z \rangle}{||z||} - ||f||$$

(căci $\langle f, z \rangle \leqslant ||f|| \, ||z||$) de unde rezultă că

$$\lim_{||z|| \to \infty} \frac{\langle U_f(z), z \rangle}{||z||} = +\infty$$

În baza celor arătate mai înainte, ecuația $U_f(z) = \mathbf{0}$ are soluție, adică ecuația $U(z) = f$ are soluție.

Teorema 2.2.1. (*F. Browder*). *Dacă* $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$ *este un operator de tip* (*b*), *atunci atunci* $U(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^*$.

Demonstrație. Să arătăm că există un element $x_0 \in \mathfrak{X}$ așa ca $U(x_0) = \mathbf{0}$. Pentru orice număr $\rho > 0$ să punem

$$\varphi(\rho) = \inf\{(U(x), x)\rho^{-1} \mid ||x|| = \rho\}$$

Operatorul U fiind de tip (*b*), $\lim\limits_{\rho \to \infty} \varphi(\rho) = +\infty$. Se observă imediat că

$$(U(x), x) \geqslant \varphi(||x||)||x||, \quad (\forall x \in \mathfrak{X}) \tag{2.6}$$

Să notăm acum cu Ψ mulțimea tuturor subspațiilor liniare finit dimensionale ale lui $\mathfrak{X}$. Mulțimea Ψ este dirijată în raport cu ordinea dată de incluziune. Pentru orice $\mathscr{Z} \in \Psi$ vom nota cu $I_{\mathscr{Z}}$ aplicația canonică a lui $\mathscr{Z}$ în $\mathfrak{X}$, adică $I_{\mathscr{Z}}(x) = x$, $\forall x \in \mathscr{Z}$. Vom considera de asemenea aplicația $I^*_{\mathscr{Z}} : \mathfrak{X}^* \to \mathscr{Z}^*$ definită astfel:

$$(I^*_{\mathscr{Z}}(f), z) = (f, z), \quad \forall z \in \mathscr{Z}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera mai departe aplicația $U_{\mathscr{X}}: \mathscr{X} \to \mathscr{X}^*$ dată de formula $U_{\mathscr{X}} = I_{\mathscr{X}}^* U I_{\mathscr{X}}$. Din

$$(U_{\mathscr{X}}(x),\ y) = (U(x),\ y), \quad (\forall x,\ y \in \mathscr{X}) \tag{2.7}$$

rezultă imediat că operatorul $U_{\mathscr{X}}$ este de tip (b). În baza propoziției 2.1.3, operatorul $U_{\mathscr{X}}$ este continuu iar cu lema 2.2.1, rezultă $U_{\mathscr{X}}(\mathscr{X}) = \mathscr{X}^*$. Fie deci $z_0 \in \mathscr{X}$ așa ca $U_{\mathscr{X}}(z_0) = \mathbf{0}$. Din

$$(U_{\mathscr{X}}(z_0),\ z_0) = (U(z_0),\ z_0) \geqslant \varphi(||z_0||)||z_0||$$

rezultă $\varphi(||z_0||) \leqslant 0$. Deoarece $\lim\limits_{\rho \to \infty} \varphi(\rho) = +\infty$, există un număr $\mu > 0$ astfel ca

$$\{x|\ \varphi(||x||) \leqslant 0\} \subset \overline{S}(\mathbf{0};\ \mu).$$

În particular $||z_0|| \leqslant \mu$.

Fie acum $\{\mathscr{X}_j\}_{j \in J}$ sistemul tuturor spațiilor $\mathscr{X}_j \in \Psi$ care conțin $\mathscr{X}$. După cum am văzut, există $z_j \in \mathscr{X}_j$, așa ca $||z_j|| \leqslant \mu$ și $U_{\mathscr{X}_j}(z_j) = \mathbf{0}$. Să punem acum

$$A(\mathscr{X}) = \bigcup_{j \in J} \{z_j \in \mathscr{X}_j|\ ||z_j|| \leqslant \mu;\ U_{\mathscr{X}_j}(z_j) = \mathbf{0}\}.$$

Avem

$$A(\mathscr{X}) \subset \overline{S}(\mathbf{0});\ \mu).$$

Fie $B(\mathscr{X})$ închiderea slabă a lui $A(\mathscr{X})$ și să considerăm familia $\{B(\mathscr{X})\}_{\mathscr{X} \in \Psi}$. Această familie este un lanț de mulțimi. Pe de altă parte, sfera $\overline{S}(\mathbf{0};\ \mu)$ este slab compactă, căci $\mathfrak{X}$ este reflexiv. Rezultă că există x_0 așa ca

$$x_0 \in \bigcap_{\mathscr{X} \in \Psi} B(\mathscr{X}).$$

Avem $U(x_0) = \mathbf{0}$.

Într-adevăr, fie $x \in \mathfrak{X}$ și să considerăm $\mathscr{X}_0 \in \Psi$ așa ca $x \in \mathscr{X}_0$. Fie $a \in A(\mathscr{X}_0)$. Operatorul U fiind monoton

$$(U(x),\ x-a) - (U(a),\ x-a) = (U(x) - U(a),\ x-a) \geqslant 0.$$

Pe de altă parte, în baza lui (2.7) rezultă

$$(U(a),\ x-a) = 0$$

căci există $\mathscr{X}_1 \in \Psi$ cu $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}_1$ și $U_{\mathscr{X}_1}(a) = \mathbf{0}$.

Deci

$$(U(x),\ x-a) \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Deoarece (2.8) are loc oricare ar fi $a \in A(\mathscr{X}_0)$ iar elementul x_0 aparține închiderii slabe a lui $A(\mathscr{X}_0)$ rezultă

$$(U(x),\ \ x-x_0) \geqslant 0, \ (\forall x \in \mathfrak{X})$$

Cu propoziția 2.1.1 în care luăm $f_0 = 0$ rezultă $U(x_0) = \mathbf{0}$.

Dacă $f \in \mathscr{X}^*$ și punem

$$U_f(x) = U(x) - f, \quad (x \in \mathfrak{X})$$

atunci U_f este de tip (b), deci există $x' \in \mathfrak{X}$ așa ca $U_f(x') = \mathbf{0}$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema este demonstrată.

Observație. Un operator $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$ se numește *strict monoton*, dacă

$$x_1 \neq x_2,\ (x_1,\ x_2 \in \mathfrak{X}) \Rightarrow (U(x_1) - U(x_2),\ x_1 - x_2) > 0.$$

Dacă în teorema lui Browder, operatorul U este și strict monoton, atunci ecuația $U(x) = f$, (cu $f \in \mathfrak{X}^*$) are soluție unică.

Aplicații. (1) Dacă $\mathfrak{X}$ este un spațiu liniar normat oarecare, iar $E \subset \mathfrak{X}$, un operator $U : E \to \mathfrak{X}$ se numește *operator contractiv* (sau contracție), dacă

$$||U(z_1) - U(z_2)|| \leqslant ||z_1 - z_2||,\ (\forall z_1,\ z_2 \in E).$$

Fie $\mathfrak{X}$ un spațiu Hilbert real, E o submulțime convexă mărginită și închisă a lui $\mathfrak{X}$ și $\overset{\vee}{E}$ frontiera topologică a lui E. Dacă $U : E \to \mathfrak{X}$ este un operator contractiv, astfel ca $U(\overset{\vee}{E}) \subset E$, atunci U are un punct fix.

Într-adevăr, pentru orice $x \in \mathfrak{X}$ să notăm cu $M(x)$ elementul de cea mai bună aproximare în E pentru x. Se poate arăta că operatorul $M : \mathfrak{X} \to E$ (adică $x \to M(x)$) este contractiv. Să considerăm acum operatorul $V = MUM$ care aplică $\mathfrak{X}$ în E. Se arată cu ușurință că V este un operator contractiv și în particular continuu. Punînd $V_0 = I - V$ (unde I este operatorul identitate pe $\mathfrak{X}$), obținem un operator de tip (b). În baza teoremei 2.2.1 există un element $x_0 \in \mathfrak{X}$ așa ca $V_0(x_0) = \mathbf{0}$, deci $V(x_0) = x_0$ și evident $x_0 \in E$. Se poate arăta că x_0 este un punct fix pentru U.

(2) Fie T o parte deschisă a spațiului $\mathbf{R}^m$, fie n un număr natural și $1 \leqslant p \in \mathbf{R}$. Să considerăm spațiul lui Sobolev $W^{n,p}(T)$ (a se vedea Cap. VIII, secțiunea 2.2) și fie $W_0^{n,p}(T)$ închiderea în $W^{n,p}(T)$ a submulțimii $\mathscr{D}(T)$. Unele ecuații cu derivate parțiale conduc la operatori de tip (b) definiți pe un subspațiu a lui $W^{n,p}(T)$, care conține $W_0^{n,p}(T)$. Pentru astfel de aplicații a se vedea, de exemplu, lucrarea 26 din „Bibliografie".

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Banach, S. *Theorie des operations linéaires.* Warszawa 1932.
2. Bourbaki, N. *Topologie générale.* Paris. Act. Sci. Ind. Hermann, Cie 1951.
3. Bourbaki, N. *Espaces vectoriels topologiques.* Paris. Act. Sci. Ind. Hermann, Cie. 1953.
4. Bremermann, H. *Distributions, complex variables and Fourier transforms.* Addison-Wesley-Publishing Company Inc. 1965.
5. Ciorănescu, Ioana. *Aplicații de dualitate în analiza funcțională neliniară.* Editura Acad. R.S.R., București, 1974.
6. Cristescu, Romulus. *Matematici generale.* Vol. I. Editura didactică și pedagogică București, 1967.
7. Cristescu, Romulus. *Spații liniare ordonate și operatori liniari.* Editura Acad. R.S.R., București, 1970.
8. Cristescu, Romulus. *Spații liniare topologice.* Editura Acad. R.S.R., București, 1974.
9. Cristescu, Romulus. *Elemente de analiză funcțională.* Editura tehnică, București, 1975.
10. Day, M. Mahlon. *Normed linear spaces.* Springer Verlag, 1958.
11. Dieudonné, J. *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, 1960.
12. Dinculeanu, N. *Teoria măsurii și funcții reale.* Editura didactică și pedagogică, București, 1965.
13. Dunford, N. and Schwartz, J. *Linear operators.* New York, 1968.
14. Elton Lacey, H. *The isometric theory of classical Banach spaces.* Springer Verlag, 1974.
15. Foiaș, C. și Grigore, Gh. *Teste de analiză funcțională.* Centrul de multiplicare al Universității, București, 1975.
16. Ghelfand, I. M., Raikov, D. A., Silov, G. E. *Komutativnie normirovanie kolța,* Moskva, 1960.
17. Ghelfand, I. M., Silov, G. E. *Obobșonie funkții.* T. 1, 2, 3. Moskva, 1958.
18. Ghika, Al. *Analiză funcțională.* Editura Acad. R.S.R., București, 1967.
19. Halmos, P. *Measure theory.* New York, 1950.
20. Halmos, P. *A. Hilbert space problem book.* Princeton, New Jersey, 1967.
21. Marinescu, Gh. *Spații vectoriale normate.* Editura Academiei R.S.R., București, 1956.
22. Naimark, M. A. *Normirovanie kolța.* Gostehizdat. Moskva, 1956.
23. Nicolescu, M. *Funcții reale și elemente de topologie.* Editura didactică și pedagogică, București, 1968.
24. Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. *Manual de analiză matematică.* Editura didactică și pedagogică, vol. I, 1962, vol. 2, 1964.
25. Onicescu, O. *Teoria probabilităților și aplicații.* Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
26. Pascali, D. *Operatori neliniari.* Editura Acadeniei R.S.R., București, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

27. Popa, Nicolae. *Produse tensoriale topologice și bornologice.* Editura Academiei R.S.R. București, 1976.
28. Riesz, F., Nagy, Sz. B. *Lecons d'analyse fonctionelle.* Budapest, 1952.
29. Schwartz, L. *Théorie des distributions.* vol. I, II. Hermann, Paris, 1950, 1951.
30. Schaefer, H. *Topological vector spaces.* Springer Verlag, 1970.
31. Sobolev, S. L. *Nekotorie primenenie funkționalnono analiza v matematiceskoi fizike.* Leningrad, 1950.
32. Vulih, B. Z. *Vvedenie v funkționalnii analiz.* Moskva, 1961.
33. Yoshida, K. *Functional analysis.* Springer Verlag, 1974.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Prefața 3

CAPITOL INTRODUCTIV 5

§ 1. Noțiuni de teoria mulțimilor 5
1.1. Mulțimi și funcții 5
1.2. Mulțimi ordonate 7

§ 2. Noțiuni de topologie 9
2.1. Spații topologice 9
2.2. Funcții continue. Definirea unor topologii 11
2.3. Spații separate. Spații compacte 12
2.4. Spații metrice 13

Capitolul I

SPAȚII LINIARE ȘI OPERATORI LINIARI 16

§ 1. Spații liniare 16
1.1. Noțiunea de spațiu liniar 16
1.2. Proprietățile spațiilor liniare 17
1.3. Subspații liniare, mulțimi plane, mulțimi convexe 19
1.4. Elemente liniar independente 22
1.5. Spații liniare izomorfe 24
1.6. Spații produs și spații cît 25

§ 2. Operatori liniari 26
2.1. Noțiunea de operator liniar 26
2.2. Spațiul operatorilor liniari 28
2.3. Baze algebrice și operatori liniari 28
2.4. Funcționale liniare și hiperplane 29
2.5. Prelungirea funcționalelor liniare reale 30
2.6. Prelungirea funcționalelor liniare complexe 35

Capitolul II

SPAȚII LINIARE TOPOLOGICE 37

§ 1. Spații liniare topologice și proprietățile lor 37

Scanned with OKEN Scanner

1.1. Noţiunea de spaţiu liniar topologic 37
1.2. Proprietăţile spaţiilor liniare topologice 38
1.3. Spaţii liniare cvasinormate 42

§ 2. Spaţii local convexe 45

2.1. Noţiunea de spaţiu local convex 45
2.2. Topologia definită de o familie de seminorme 45
2.3. Seminorme pe spaţii local convexe 46
2.4. Mulţimi dirijate de seminorme. Compararea topologiilor local convexe 48
2.5. Funcţionale liniare şi continue 50
2.6. Topologia slabă pe un spaţiu local convex 52
2.7. Spaţii bornologice 53
2.8. Limite inductive de spaţii local convexe 54

Capitolul III

SPAŢII LINIARE NORMATE 56

§ 1. Spaţiile liniare normate şi proprietăţile lor 56

1.1. Noţiunea de spaţiu liniar normat 56
1.2. Spaţii normate finit dimensionate şi aproximarea elementelor în spaţii normate 59
1.3. Produse finite de spaţii liniare normate 61
1.4. Spaţiu liniar normat cît 63
1.5. Spaţii liniare normate separabile 64

§ 2. Spaţii Banach 65

2.1. Spaţii liniare normate complete 66
2.2. Completarea unui spaţiu liniar normat 67
2.3. Familii sumabile de elemente ale unui spaţiu Banach 69
2.4. Spaţii Banach uniform convexe 73

§ 3. Exemple de spaţii Banach 75

3.1. Spaţii de şiruri numerice 75
3.2. Spaţii de funcţii numerice mărginite 76
3.3. Spaţii de clase de funcţii p-integrabile 79

Capitolul IV

OPERATORI LINIARI CONTINUI 83

§ 1. Operatori liniari şi continui 83

1.1. Generalităţi privind operatorii liniari şi continui 83
1.2. Spaţiul operatorilor liniari şi continui 87
1.3. Convergenţa punctuală şi principiul mărginirii uniforme 90
1.4. Operatori liniari inversabili între spaţii normate 92
1.5. Operatori deschişi 93
1.6. Operatori închişi 95
1.7. Ecuaţii operatoriale liniare în spaţii Banach 96
1.8. Puncte fixe pentru mulţimi de operatori liniari şi continui 102

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Conjugatul unui spaţiu liniar normat 103
2.1. Funcţionale liniare şi continue pe spaţii normate 103
2.2. Forma generală a funcţionalelor liniare şi continue pe anumite spaţii concrete 104
2.3. Conjugatul unui spaţiu normat şi topologii slabe 115
2.4. Aplicaţii la spaţii concrete 118
§ 3. Operatori compacţi 120
3.1. Definiţia şi proprietăţile operatorilor compacţi 120
3.2. Exemple de operatori compacţi 122

Capitolul V

SPAŢII LINIARE ORDONATE ŞI OPERATORI REGULAŢI 125
§ 1. Spaţii liniare ordonate 125
1.1. Noţiunea de spaţiu liniar ordonat 125
1.2. Spaţii liniare reticulate 127
1.3. Spaţii liniare complet reticulate 131
1.4. Spaţii reticulate normate 132
§ 2. Operatori regulaţi 134
2.1. Operatori aditivi şi operatori pozitivi 134
2.2. Operatori regulaţi şi proprietăţile lor 135
2.3. Funcţionale regulate pe spaţii reticulate normate 136
2.4. Funcţionale regulate pe spaţiul C(T) 137

Capitolul VI

SPAŢII HILBERT ŞI OPRATORI AUTOADJUNCŢI 139
§ 1. Spaţiile Hilbert şi proprietăţile lor 139
1.1. Produs scalar 139
1.2. Noţiunea de spaţiu Hilbert 140
1.3. Ortogonalitate 143
1.4. Proiecţii 144
1.5. Descompuneri ortogonale 146
1.6. Spaţiile Hilbert în teoria probabilităţilor 146
§ 2. Baze ortonormale în spaţii Hilbert 147
2.1. Familii ortonormale 147
2.2. Baze ortonormale 149
2.3. Dimensiunea hilbertiană 151
2.4. Reprezentarea spaţiilor Hilbert 151
2.5. Aplicaţie la spaţiul $L^2(T)$ 154
§ 3. Operatori autoadjuncţi 157
3.1. Conjugatul unui spaţiu Hilbert 157
3.2. Adjunctul unui operator 159
3.3. Operatori autoadjuncţi 161
3.4. Funcţionale hermitiene mărginite 164

Scanned with OKEN Scanner

3.5. Operatori autoadjuncți pozitivi 164
3.6. Proiectori 168
3.7. Operatori normali 169
§ 4. Rezolvanta și spectrul unui operator autoadjunct 171
4.1. Numere proprii și elemente proprii 171
4.2. Rezolvanta și spectrul 172
4.3. Ecuații operatoriale 175
§ 5. Reprezentarea integrală a operatorilor autoadjuncți 176
5.1. Familii spectrale 176
5.2. Reprezentarea integrală 180

Capitolul VII

ALGEBRE NORMATE 183
§ 1. Algebre 183
1.1. Definiții și exemple 183
1.2. Algebre cu unitate 184
1.3. Ideale 185
§ 2. Algebre normate 187
2.1. Noțiunea de algebră normată 187
2.2. Algebra $L_K(R)$ 189
2.3. Elemente inversabile în algebre Banach unitare 191
2.4. Algebre normate cît 194
§ 3. Reprezentarea algebrelor Banach 195
3.1. Corp Banach 195
3.2. Spațiul caracterelor 195
3.3. Algebra $\Phi(\mathfrak{X})$ 197
3.4. Teorema lui Stone-Weierstrass 199
3.5. Reprezentarea unor algebre Banach 202

Capitolul VIII

DISTRIBUȚII 205
§ 1. Generalități asupra distribuțiilor 205
1.1. Spațiul lui Schwartz 205
1.2. Noțiunea de distribuție 207
1.3. Distribuții care se anulează pe o mulțime deschisă 210
1.4. Distribuții cu suport compact 211
1.5. Distribuții temperate 212
§ 2. Operații cu distribuțiile 213
2.1. Derivarea distribuțiilor de o variabilă 214
2.2. Derivarea distribuțiilor de mai multe variabile 215
2.3. Produsul direct a două distribuții 216
2.4. Convoluția a două distribuții 219
2.5. Transformata Fourier a unei distribuții temperate 220

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

OPERATORI NELINIARI 222
§ 1. Puncte fixe pentru operatori neliniari 222
1.1. Noțiuni introductive 222
1.2. Teorema de punct fix a lui Schauder-Tihonov 225
§ 2. Operatori monotoni 227
2.1. Operatori monotoni și operatori hemicontinui 227
2.2. Operatori de tip (b) 230
BIBLIOGRAFIE 234

Tiraj: 6 500 ex. legate. S.P.: 90. Coli de tipar: 15. Hîrtie: Ofset A 70×100/75. Format: 16/70×100. Bun de tipar: 15.VI.1979. Nr. plan: 5766. Editia 1979.

Tiparul executat sub comanda nr. 143,
la Întreprinderea Poligrafică „Crișana",
Oradea, str. Moscovei nr. 5.
Republica Socialistă România